# Quadratische Gleichungen

*Alle aufgezeigten Lösungswege gelten für Gleichungen, die schon vereinfacht und zusammengefasst wurden.*

***Es darf nur noch +1x² vorhanden sein!!!***

*(Also nicht +2x² und auch nicht –3x²; bitte vorher die ganze Gleichung dividieren.)*

## 1. Reinquadratische Gleichungen

Hierbei handelt es sich um Gleichungen, die letztendlich nur noch $x^2$ und eine Zahl enthalten.

z.B. : $x^2 = 25 \mid \sqrt{\phantom{x}}$ An dieser Stelle wird nun die Wurzel gezogen.

$x_{1/2} = \pm 5$ Man bekommt für x zwei Lösungen heraus ($x_1$ und $x_2$ also $x_{1/2}$), die negative und die positive Version der Zahl 5.

$L = \{-5; +5\}$ Dies wird auch in der Lösungsmenge deutlich.

Ein weiteres Beispiel:

$x^2 = 36 \mid \sqrt{\phantom{x}}$ Wurzel ziehen.

$x_{1/2} = \pm 6$ Beide Lösungen kenntlich machen.

$L = \{-6; +6\}$ Lösungsmenge schreiben.

**Aber !!!**

$x^2 = -9 \mid \sqrt{\phantom{x}}$ Hier gibt es keine Lösung! (Aus einer negativen Zahl kann man keine Wurzel ziehen.)

$L = \{\ \}$ Leere Menge!

<u>doch:</u>

$x^2 = 0 \mid \sqrt{\phantom{x}}$ Die Wurzel von Null ist null.

$x = 0$

$L = \{0\}$ Hier gibt es nur <u>eine</u> Lösung.

## 2. Gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante

*Eine Konstante ist eine reine Zahl ohne x.*

Hier handelt es sich um Gleichungen die $x^2$ und x und nur die Null enthalten.

z.B.: $x^2 - 4x = 0$ Diese Gleichungen immer in die Form „= 0 “ bringen!

Man muss erkennen, dass man x ausklammern kann.

$x \cdot (x-4) = 0$ Man kann Gleichungen dieser Art auch über die nachfolgend erklärten Möglichkeiten lösen, aber der hier aufgezeigte Lösungsweg ist kürzer (schneller) und birgt somit weniger Möglichkeiten für Rechenfehler.

**Merke!**

**Ein Produkt ist immer genau dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist.**

d.h.:

$x = 0$ oder $x - 4 = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 4$

$L = \{0;4\}$ Bei diesen Gleichungen ist eine Lösung immer die „0“.

Ein weiteres Beispiel:

$x^2 + 3x = 0$

$x \cdot (x+3) = 0$

$x = 0$ oder $x + 3 = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = -3$

$L = \{-3;0\}$

## 3. Gemischtquadratische Gleichungen mit Konstante

*An dieser Stelle soll eine weitere Unterscheidung aufgezeigt werden, wobei 3.1 meist eine untergeordnete Rolle spielt.*

### 3.1 Binomische Formeln

z.B.: Diese Gleichungen immer in die Form „= 0 " bringen!

$x^2 + 6x + 9 = 0$ Hier muss man allerdings die binomische Formel erkennen.

$(x+3)^2 = 0 \mid \sqrt{\ }$ Nun kann man die Wurzel ziehen.

$x + 3 = 0$

$x = -3$

$L = \{-3\}$ Gleichungen dieser Art besitzen nur eine Lösung!

### 3.2 Allgemeine Form

z.B.: $x^2 - 6x + 8 = 0$ Diese Gleichungen immer in die Form „= 0 " bringen!

*Die folgenden beiden Lösungsmöglichkeiten lassen sich auf* ***alle*** *Varianten von quadratischen Gleichungen anwenden. Die vorher aufgezeigten Lösungswege sind aber günstiger.*

#### 3.2.1 quadratische Ergänzung

Der Term $x^2 - 6x + 8$ ist keine binomische Formel.

Bringt man aber die Konstante „8" auf die andere Seite, kann man die ersten beiden Teile „quadratisch" ergänzen.

$x^2 - 6x + 8 = 0 \mid -8$

$x^2 - 6x + ? = -8$

Zur Bestimmung des „?" muss die „-6" durch 2 dividiert und das Ergebnis dann quadriert werden.

$-6 : 2 = -3$

$(-3)^2 = +9$ Da Quadrate immer positiv sind, wird das „?" immer addiert.

$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$ Die errechnete Zahl muss auch auf der anderen Seite der Gleichung addiert werden, damit die Gleichung wieder stimmt.

$x^2 - 6x + 9 = 1$ Nun wird zusammengefasst, rechts die beiden Zahlen und

$(x-3)^2 = 1$ links bildet man die binomische Formel.

Die Zahl und das Vorzeichen in der Klammer der binomischen Formel ergeben sich aus der vorherigen Rechnung.

$-6:2=-3$

$(x-3)^2=1$

$(x-3)^2=1 \;\vert\; \sqrt{\ }$ — Nun wird wieder die Wurzel gezogen.

$x-3=\pm 1$ — Darauf achten, dass wieder positive und negative Zahl entstehen.

Zur weiteren Lösung muss man aufsplitten.

$x-3=-1$ und $x-3=+1$

$x_1=2$ $\quad$ $x_2=4$

$L=\{2;4\}$

Ein weiteres Beispiel:

$x^2-2x-3=0 \;\vert\; +3$

$x^2-2x=+3$ $\quad$ Nebenrechnung im Kopf: $-2:2=-1$, $(-1)^2=+1$

Diese „-1“ muss wieder in die Klammer.

$x^2-2x+1=+3+1$

$x^2-2x+1=4$

$(x-1)^2=4 \;\vert\; \sqrt{\ }$

$x-1=\pm 2$

$x-1=-2$ und $x-1=+2$

$x_1=-1$ $\quad$ $x_2=+3$

$L=\{-1;3\}$

**Aber !!!**

$x^2+8x+25=0 \;\vert\; -25$

$x^2+8x=-25$ $\quad$ Nebenrechnung: $8:2=4$, $4^2=16$

$x^2+8x+16=-25+16$

$x^2 + 8x + 16 = -9$

$(x+4)^2 = -9 \mid \sqrt{\phantom{x}}$ Hier gibt es keine Lösung! (Aus einer negativen Zahl kann man keine Wurzel ziehen.)

$L = \{\ \}$ Leere Menge!

Hinweis:

$x^2 + 12x + 36 = 0$ Der Term ist eine binomische Formel. Hat man diese nicht erkannt, verfährt man wie gewohnt.

$x^2 + 12x + 36 = 0 \mid -36$

$x^2 + 12x = -36$ Nebenrechnung: $12:2 = 6$; $6^2 = 36$

$x^2 + 12x + 36 = -36 + 36$

$x^2 + 12x + 36 = 0$ Beim Zusammenfassen entsteht rechts eine Null.

$(x+6)^2 = 0 \mid \sqrt{\phantom{x}}$

$x + 6 = 0$

$x = -6$

$L = \{-6\}$ Gleichungen von binomischen Formeln besitzen nur eine Lösung!

*Auf der folgenden Seite wird der am meisten verwendete Lösungsweg dargestellt.*

*Die Erklärung der sogenannten abc-Formel wird hier nicht behandelt.*
*Diese Formel ermöglicht es auch mit Faktoren vor dem $x^2$ zu arbeiten.*
*Wer diese Formel anwenden kann, darf sie gerne benutzen.*

*Wir beziehen uns jedoch immer auf $+1x^2$.*

### 3.2.2 p-q-Formel

Die p-q-Formel ist eine andere Schreibweise für die quadratische Ergänzung.

*Zur Verdeutlichung wird das gleiche Beispiel wie bei der quadratischen Ergänzung gewählt.*

$x^2 - 6x + 8 = 0$ oder allgemein formuliert $x^2 + px + q = 0$

Zuerst werden nun „p“ und „q“ bestimmt.

In diesem Fall ist

p= $-6$

(also das Vorzeichen und die Zahl vor dem einfachen x)

und

q= $+8$

(also die Konstante mit Vorzeichen).

Die p-q-Formel lautet:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die Zahlen aus dem Beispiel eingesetzt ergeben:

$$x_{1/2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - (+8)}$$

Dies ist eine ausführliche Schreibweise, die nur das exakte Einsetzen der Zahlen verdeutlichen soll.

Betrachtet man diese Formel in einzelnen Segmenten, so ergibt sich:

$x_{1/2}$ bedeutet, dass zwei Lösungen möglich sind.

$-\frac{-6}{2}$ Diesen Bruch vereinfacht man zu $+3$.

Das Zeichen $\pm$ weist darauf hin, dass nach dem Wurzelziehen wieder die positive und negative Version einer Zahl beachtet werden muss.

$\left(\frac{-6}{2}\right)^2$ Diese Potenz wird zu +9 vereinfacht.

$-(+8)$ Löst man die Klammer auf ergibt sich $-8$.

Zusammengesetzt entsteht folgende Formel:

$x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{9-8}$ Es wird unter der Wurzel zusammengefasst

$x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{1}$ und dann die Wurzel gezogen.

$x_{1/2} = +3 \pm 1$ — Nun muss man wieder aufsplitten.

$x_1 = +3 - 1$ und $x_2 = +3 + 1$ — Erneutes Zusammenfassen bringt die Lösungen.

$x_1 = 2$ $\quad x_1 = 4$

$L = \{2;4\}$

Ein weiteres Beispiel:

$x^2 + 4x - 5 = 0$ $\quad p = +4$ und $q = -5$ in die p-q-Formel einsetzen.

$x_{1/2} = -\frac{+4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{+4}{2}\right)^2 - (-5)}$ — Dies ist wiederum die ausführliche Form.

$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+5}$ — Mit etwas Übung kann man sofort diese vereinfachte Form schreiben, dann Zusammenfassen und Wurzel ziehen.

$x_{1/2} = -2 \pm 3$ — Nun muss man wieder aufsplitten.

$x_1 = -2 - 3$ und $x_2 = -2 + 3$ — Erneutes Zusammenfassen bringt die Lösungen.

$x_1 = -5$ $\quad x_1 = 1$

$L = \{2;4\}$

**Aber !!!**

$x^2 - x + 12 = 0$ — Diese Gleichung führt beim Einsetzen

$x_{1/2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 12}$ — und Zusammenfassen

$x_{1/2} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{-11{,}75}$ — zu einer negativen Zahl unter der Wurzel. Man kann keine Wurzel ziehen und somit gibt es für diese Gleichung keine Lösungen.

$L = \{\ \}$ — Leere Menge!

Hinweis:

$x^2 - 10x + 25 = 0$

Der Term ist eine binomische Formel. Hat man diese nicht erkannt, verfährt man wie gewohnt. Beim Zusammenfassen ergibt sich unter der Wurzel eine Null. Da die Wurzel von Null wieder null ist, ergibt sich nur eine Lösung.

$x_{1/2} = +5 \pm \sqrt{25 - 25}$

$x_{1/2} = +5 \pm \sqrt{0}$

$x_{1/2} = +5 \pm 0$

$L = \{5\}$

**!!! Wichtig !!!**

Zum Schluss soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass man mit folgenden Gleichungen **<u>nicht</u>** arbeiten kann, da noch ein anderer Faktor als **+1** vor dem $x^2$ steht.

$3x^2 - 15x = 0$ oder $-2x^2 = -32$ oder $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0$

Hier muss erst umgeformt werden.

$3x^2 - 15x = 0 \mid :3$ $\qquad -2x^2 = -32 \mid :(-2)$ $\qquad \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \mid :\frac{1}{4}$

$x^2 - 5x = 0$ $\qquad x^2 = 16$ $\qquad x^2 - x - 6 = 0$

$L = \{0;5\}$ $\qquad L = \{-4;+4\}$ $\qquad L = \{-2;+3\}$

# <u>Erstellen von quadratischen Gleichungen aus den Lösungen</u>

Hat man die Lösungen einer quadratischen Gleichung mit dem <u>Faktor +1 vor dem $x^2$</u> gegeben, so kann man über zwei Methoden diese Gleichung bestimmen.

**1.) <u>Linearfaktoren</u>**

Linearfaktoren sind Terme, die aus x und einer Lösung bestehen.
Allgemein formuliert: $(x - x_0)$ wobei $x$ die Variable ist und $x_0$ eine Lösung darstellt.

Beispiel:

Die Lösungen einer Gleichung lauten:

$x_1 = +4$ und $x_2 = -2$.

Setzt man in die Formel für Linearfaktoren ein, so erhält man:

$(x-4)$ und $(x+2)$. Die Vorzeichen werden durch das vorgegebene Minus in der Formel $(x - x_0)$ gedreht.

Wendet man den Satz an,

**Ein Produkt ist immer genau dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist.**

ergeben sich die beiden Linearfaktoren zu folgender Gleichung:

| | |
|---|---|
| $(x-4)\cdot(x+2)=0$ | Ausmultiplizieren |
| $x^2 + 2x - 4x - 8 = 0$ | und Zusammenfassen |
| $x^2 - 2x - 8 = 0$ | führt zu dieser Gleichung. |

Löst man diese Gleichung, erhält man wieder die beiden vorgegebenen Werte.

Man kann eine quadratische Gleichung mit Linearfaktoren allgemein schreiben als:

$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$

weiteres Beispiel:

$x_1 = -3$ und $x_2 = 7$

| | |
|---|---|
| $(x+3)\cdot(x-7)=0$ | Einfach die Zahlen mit umgedrehtem Vorzeichen |
| $x^2 - 4x - 21 = 0$ | in die Klammern setzen und ausrechnen. |

Linearfaktoren spielen eine wichtige Rolle bei der Polynomdivision!

**2.) <u>Satz von Vieta</u>**

*Die Anwendung des Satzes von Vieta lässt meist eine schnellere Erstellung der Gleichung zu, bzw. ermöglicht eine rasche Probe bei quadratischen Gleichungen.*

Hierzu benutzt man wieder die Formel:

$x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen $x_1$ und $x_2$,

wobei „p“ als $p = -(x_1 + x_2)$

und „q“ als $q = x_1 \cdot x_2$

definiert wird.

Beispiele:

Die Lösungen einer Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_2 = +6$

Durch Vieta berechnet man

$p = -(-1 + 6)$

$p = -(+5)$

$p = -5$

und

$q = (-1) \cdot 6$

$q = -6$

und die Gleichung ergibt sich zu $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Oder wenn die Lösungen lauten: $x_1 = 2$ und $x_2 = 9$.

$p = -(2 + 9)$

$p = -11$

und

$q = 2 \cdot 9$

$q = 18$

Dann lautet die zugehörige Gleichung: $x^2 - 11x + 18 = 0$

Allerdings lassen sich nur Gleichungen finden, die auch Lösungen besitzen.

**Viel Erfolg!**