Lösungen L

1. Aufgabe

Hauptbedingung: $A = x \cdot (y-1)$

Nebenbedingung: $f(x) = -x^2 + 13$ und $g(x) = 1$

Hier wird die Nebenbedingung nicht = 0 gesetzt, da man keine Nullstellen der Parabel sucht. Vielmehr benötigt man die Schnittpunkte von Parabel und Gerade. Daher setzt man f(x) und g(x) gleich und ermittelt so den x-Wert für den Definitionsbereich.

$$-x^2 + 13 = 1$$
$$x^2 = 12$$
$$x_1 = 3{,}5$$
$$[x_2 = -3{,}5]$$

$$ID = [0;3{,}5]$$

Bildung der Zielfunktion:

$$A(x) = x \cdot (-x^2 + 13 - 1)$$
$$A(x) = -x^3 + 12x$$

Ableitungen und Berechnung des Extremwerts:

$$A'(x) = -3x^2 + 12$$
$$A''(x) = -6x$$

$$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$$

$$0 = -3x^2 + 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x_1 = 2LE$$
$$[x_2 = -2]$$

$$A''(2) = -12 < 0 \Rightarrow Max. \qquad A(2) = 16FE$$

Berechnung der zweiten Seite des Rechtecks:
Hier reicht es nicht aus y (also f(2)) zu berechnen. Man muss noch eine Einheit abziehen, da das Rechteck in y-Richtung eine Längeneinheit nach oben verschoben und somit kürzer ist.

$$f(2) = 9$$
$$\text{Re}\,chtecksseite: y - 1$$
$$also: 9 - 1 = 8LE$$

Untersuchung der Randstellen:

$$A(0) = 0 < 16FE$$
$$A(3{,}5) = -0{,}875 < 16FE$$

Das gesuchte Rechteck hat eine Breite von 2 LE eine Höhe von 8 LE und einen Flächeninhalt von16 FE.

2. Aufgabe

Erstellen der ökonomischen Funktionen

1. p(x)

Der Preis der Ware beträgt konstant 5 GE. Dies bedeutet, dass der Preis nicht durch die Menge verändert werden kann (m=0). Deshalb bleibt nur die Konstante in der Preis-Absatz-Funktion übrig.

$$p(x) = 5$$

2. E(x)

Die Erlösfunktion ergibt sich weiterhin durch Multiplikation mit x.

$$E(x) = 5x$$

3. G(x) 2. Grades

Da Angaben über den Gewinn gemacht werden, muss hier zuerst die Gewinnfunktion erstellt werden.

2 ME kein Gewinn => (2l0)

3 ME erzielen 2,5 GE mehr Erlös als Kosten heißt also 2,5 GE Gewinn => (3l2,5)

8 GE fixe Kosten => Konstante der Gewinnfunktion (hier c) = – 8

Die Gewinnfunktion 2. Grades lautet in allgemeiner Form: $G(x) = ax^2 + bx + c$

Ableitungen werden nicht benötigt.

(2l0)	G(2)=0	$0 = 4a + 2b + c$
(3l2,5)	G(3)=2,5	$2{,}5 = 9a + 3b + c$
$K_{fix} = 8$		$-8 = c$

Einsetzen von c und lösen des Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{array}{l|l} 8 = 4a + 2b & \cdot 3 \\ 10{,}5 = 9a + 3b & \cdot (-2) \\ \hline 24 = 12a + 6b & \\ -21 = -18a - 6b & \\ \hline 3 = -6a & \\ -0{,}5 = a & \\ 8 = 4 \cdot (-0{,}5) + 2b & \\ 5 = b & \end{array}$$

Somit folgt:

$G(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 8$.

Daraus berechnet sich die Kostenfunktion mit: K(x) = E(x) – G(x).

$$K(x) = 5x - (-0{,}5x^2 + 5x - 8)$$

$$K(x) = 0{,}5x^2 + 8$$

3. Aufgabe

a)
Die Stelle für das Grenzkostenminimum ist der x-Wert des Wendepunktes der Kostenfunktion bzw. der x-Wert des Extremwertes der Grenzkostenfunktion $K'(x)$.

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 7{,}5x + 16$$
$$K'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 7{,}5$$
$$K''(x) = 3x - 6 \qquad\qquad K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$$
$$K'''(x) = 3$$

$$0 = 3x - 6$$
$$x = 2ME \qquad\qquad K'''(2) = 3 > 0 \Rightarrow Min.$$

(Die zugehörige Steigung (Grenzkostenminimum) $K'(2) = 1{,}5$ war hier nicht gefragt.)

b)
Für den $D_{ök}$ benötigt man die Preis-Absatz-Funktion, die man aus der Erlösfunktion bildet. Dazu muss man $E'(x)$ erst aufleiten.

$$E'(x) = -7x + 24{,}5$$
$$E(x) = -3{,}5x^2 + 24{,}5x$$
$$p(x) = -3{,}5x + 24{,}5$$

$$p(x) = 0$$
$$0 = -3{,}5x + 24{,}5$$
$$x = 7ME$$
$$Sättigungsmenge$$

$$p(x) \geq 0$$
$$ID_{ök} = [0;7]$$

c)
Der Cournotsche Punkt besteht aus x_{Gmax} und $p(x_{Gmax})$.
Man muss also die Gewinnfunktion bilden, 1. Ableitung =0 setzen, in der 2. Ableitung überprüfen und dann den gefundenen x-Wert in die p(x) einsetzen.

$$G(x) = E(x) - K(x)$$
$$G(x) = -3{,}5x^2 + 24{,}5x - (0{,}5x^3 - 3x^2 + 7{,}5x + 16)$$
$$G(x) = -0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 + 17x - 16 \qquad\qquad G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$$
$$G'(x) = -1{,}5x^2 - x + 17$$
$$G''(x) = -3x - 1$$

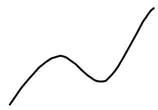
$$0 = -1{,}5x^2 - x + 17$$
$$0 = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{34}{3}$$
$$x_{1/2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{34}{3}} \qquad\qquad G''(3) = -10 < 0 \Rightarrow Max. \qquad\qquad p(3) = 14GE$$
$$x_1 = 3ME$$
$$[x_2 = -3{,}7]$$

Der Cournotsche Punkt lautet: (3l14).

4. Aufgabe

Hier muss man erst einmal die Extremwerte sowie die Nullstellen (eventueller Wechsel der Fläche zwischen positiv und negativ) berechnen und sich eine Skizze anfertigen. (im Prinzip fast eine vollständige Kurvendiskussion)

$$f(x) = 0{,}2x^3 - 2{,}4x^2 + 9x - 10$$
$$f'(x) = 0{,}6x^2 - 4{,}8x + 9$$
$$f''(x) = 1{,}2x - 4{,}8$$

Verlauf:  Symmetrie: keine

$$f(x) = 0$$
$$0 = 0{,}2x^3 - 2{,}4x^2 + 9x - 10$$

Polynomdivision mit $x_1 = 5$

$$0 = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$$

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 12x^2 + 45x - 50) : (x - 5) = x^2 - 7x + 10 \\
\underline{-(x^3 - 5x^2)} \\
\quad -7x^2 + 45x \\
\quad \underline{-(-7x^2 + 35x)} \\
\qquad 10x - 50 \\
\qquad \underline{-(10x - 50)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$x_{2/3} = +3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 10}$$
$$x_{2/3} = +3{,}5 \pm 1{,}5$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = 2$$

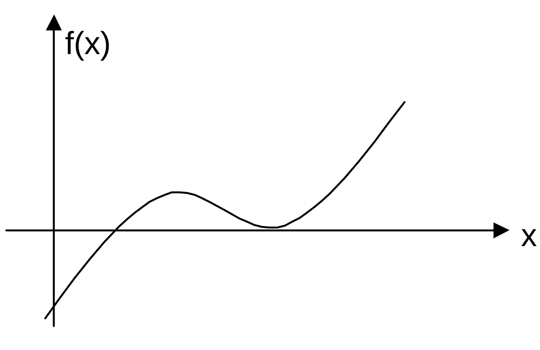
Die Nullstellen liegen bei $S_{x1}(2|0)$ und $S_{x2/3}(5|0)$.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$
$$0 = 0{,}6x^2 - 4{,}8x + 9$$
$$0 = x^2 - 8x + 15$$
$$x_{1/2} = +4 \pm \sqrt{16 - 15}$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 3$$

$$f''(5) = 1{,}2 > 0 \Rightarrow Tiefpunkt$$
$$f''(3) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow Hochpunkt$$

(y-Werte sind hier nicht nötig)

Daraus ergibt sich folgende Skizze:



Nun kennt man die Grenzen, in denen man integrieren muss. Da keine Nullstellen dazwischen liegen, muss auch ein Wechsel der Flächen nicht berücksichtigt werden.
a = 3 (Hochpunkt) und b = 5 (Tiefpunkt)
Da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, braucht man keine Betragsstriche.

$$A = \int_3^5 (0{,}2x^3 - 2{,}4x^2 + 9x - 10)dx = \left[0{,}05x^4 - 0{,}8x^3 + 4{,}5x^2 - 10x\right]_3^5 = [-6{,}25] - [-7{,}05] = 0{,}8FE$$

<u>5. Aufgabe</u>

Da hier eine Fläche zwischen beiden Graphen gesucht wird, berechnet man zuerst die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

$$f_1(x) = f_2(x)$$
$$x^3 - 8x^2 + 16x = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$$
$$\frac{13}{16}x^3 - 6\frac{7}{8}x^2 + 16x - 6 = 0$$

Hier empfiehlt sich keine Veränderung der Gleichung, da die Konstante nicht ganzzahlig bleibt.
Der Teiler ist auch nicht aus der 6 zu ermitteln. Neuere Taschenrechner mit Suchfunktion für Nullstellen werden die Lösung $x_1 = 4$ finden.

$$(\frac{13}{16}x^3 - 6\frac{7}{8}x^2 + 16x - 6) : (x - 4) = \frac{13}{16}x^2 - 3\frac{5}{8}x + 1{,}5$$
$$-(\frac{13}{16}x^3 - \frac{13}{4}x^2)$$
$$-3\frac{5}{8}x^2 + 16x$$
$$-(-3\frac{5}{8}x^2 + 14\frac{1}{2}x)$$
$$1{,}5x - 6$$
$$-(1{,}5x - 6)$$
$$0$$

$$\frac{13}{16}x^2 - 3\frac{5}{8}x + 1{,}5 = 0$$
$$x^2 - 4\frac{6}{13}x + 1\frac{11}{13} = 0$$
$$x_{2/3} = +2\frac{3}{13} \pm \sqrt{4\frac{165}{169} - 1\frac{11}{13}}$$
$$x_2 = 3\frac{12}{13} = 3{,}9$$
$$x_3 = \frac{5}{13} = 0{,}4$$

Da die Fläche zwischen den Graphen im ersten Quadranten berechnet werden soll, ist die erste Grenze die y-Achse, also $x_1 = 0$.
Dann kommen $x_2 = 0{,}4$ und $x_3 = 3{,}9$ und $x_4 = 4$. Man muss also 3 Flächen berechnen.

$$A_1 = \left|\int_0^{0,4}(\frac{13}{16}x^3 - 6\frac{7}{8}x^2 + 16x - 6)dx\right| = \left|\left[\frac{13}{64}x^4 - 2\frac{7}{24}x^3 + 8x^2 - 6x\right]_0^{0,4}\right| = |[-1{,}3] - [0]| = |-1{,}3| = 1{,}3FE$$
$$A_2 = \left|\int_{0,4}^{3,9}(\frac{13}{16}x^3 - 6\frac{7}{8}x^2 + 16x - 6)dx\right| = \left|\left[\frac{13}{64}x^4 - 2\frac{7}{24}x^3 + 8x^2 - 6x\right]_{0,4}^{3,9}\right| = |[9{,}3] - [-1{,}3]| = |10{,}6| = 10{,}6FE$$
$$A_3 = \left|\int_{3,9}^{4}(\frac{13}{16}x^3 - 6\frac{7}{8}x^2 + 16x - 6)dx\right| = \left|\left[\frac{13}{64}x^4 - 2\frac{7}{24}x^3 + 8x^2 - 6x\right]_{3,9}^{4}\right| = \left|\left[9\frac{1}{3}\right] - [9{,}3]\right| = |0| = 0FE$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3$$
$$A_{ges} = 1{,}3 + 10{,}6 + 0 = 11{,}9FE$$