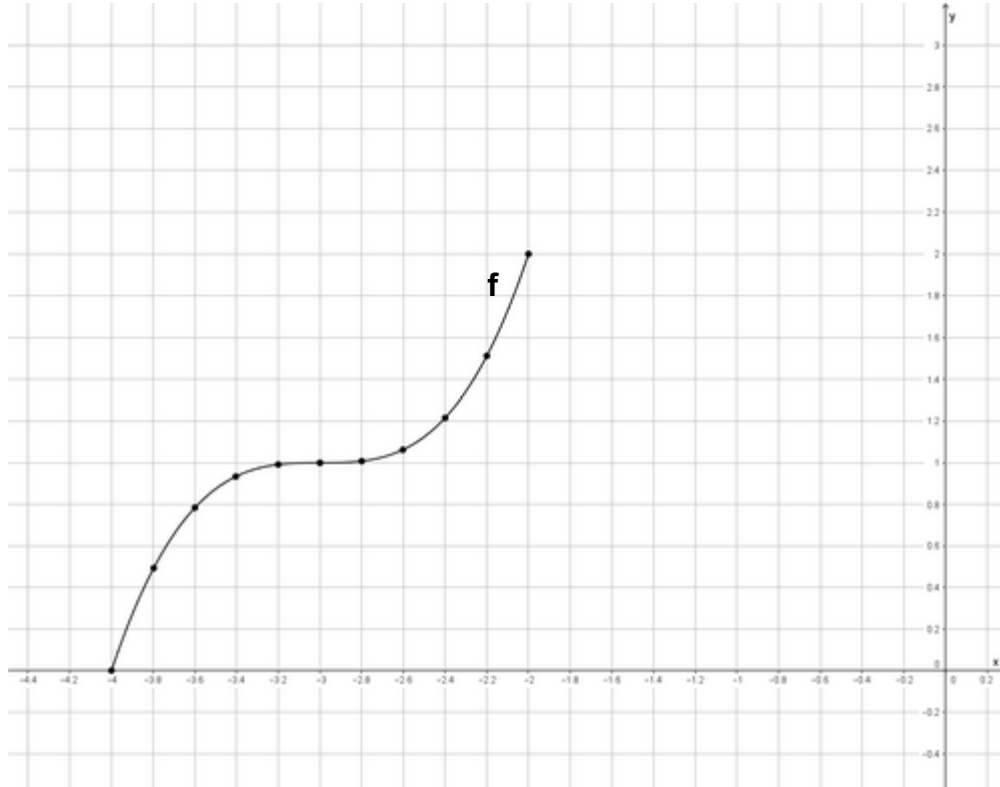


Lösungen tegut E 17

1.Aufgabe

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 28$$

a)



b) $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$ Der Graph kommt von unten und geht nach oben.
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow +\infty$

c) für das angegebene Intervall: $M_1 = [-4; -2]$ monoton steigend
 oder für den gesamten Graphen: $M_1 =]-\infty; +\infty[$ monoton steigend

d) $f(x) = 0$

$$0 = x^3 + 9x^2 + 27x + 28 \quad \text{TR: } x_1 = -4$$

Polynomdivision oder Horner-Schema führt zu $x^2 + 5x + 7 = 0$

pq-Formel ergibt negative Wurzel: $x_{2/3} = \text{n.l.}$

$$S_{x_1}(-4|0)$$

e) $f'(x) = 3x^2 + 18x + 27$

$$f''(x) = 6x + 18$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 3x^2 + 18x + 27 : 3 \text{ und pq-Formel ergibt } x_{1/2} = -3$$

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f''(-3) = 0 \Rightarrow \text{kein Extrempunkt sondern Sattelpunkt}$$

$$f(-3) = 1 \quad \text{Sattelpunkt } (-3|1)$$

$$f''(x) = 0$$

$$0 = 6x + 18$$

$$x = -3$$

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f'''(-3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{R-L-K}$$

$$f(-3) = 1 \quad W_{\text{R-L}}(-3|1)$$

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung null.

f) $S_{x_1}(-4|0)$

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 27$$

$$f'(-4) = 3$$

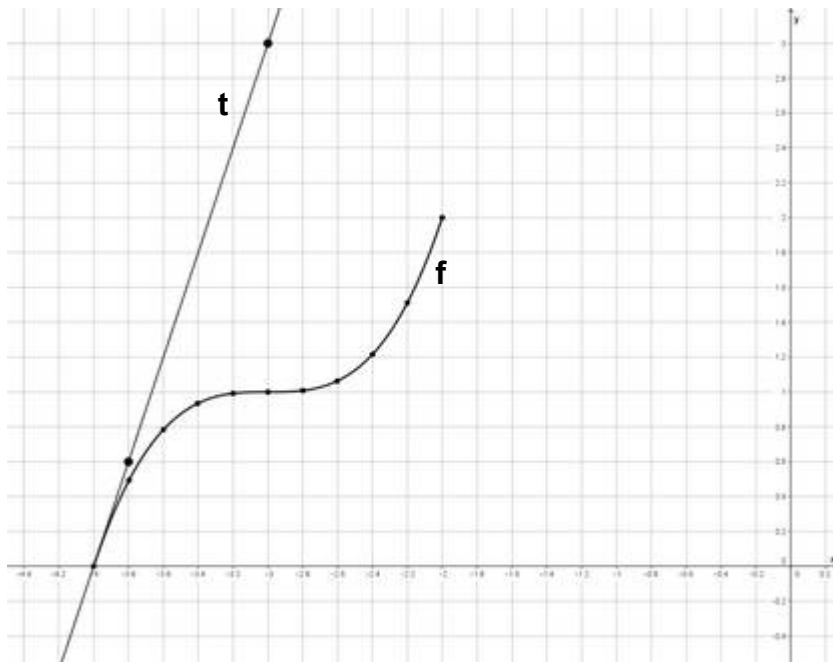
$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$0 = 3 \cdot (-4) + b$$

$$b = 12$$

$$t(x) = 3x + 12$$

g)



h) $\tan(\alpha) = m$

$$\tan^{-1}(m) = \alpha$$

$$m = 3$$

$$\tan^{-1}(3) = \alpha$$

$$\alpha = 71,57^\circ$$

i) $f(x) = t(x)$

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 28 = 3x + 12 \quad | -3x - 12$$

$$x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$$

$$\text{TR: } x_{1/2} = -4 \text{ und } x_3 = -1$$

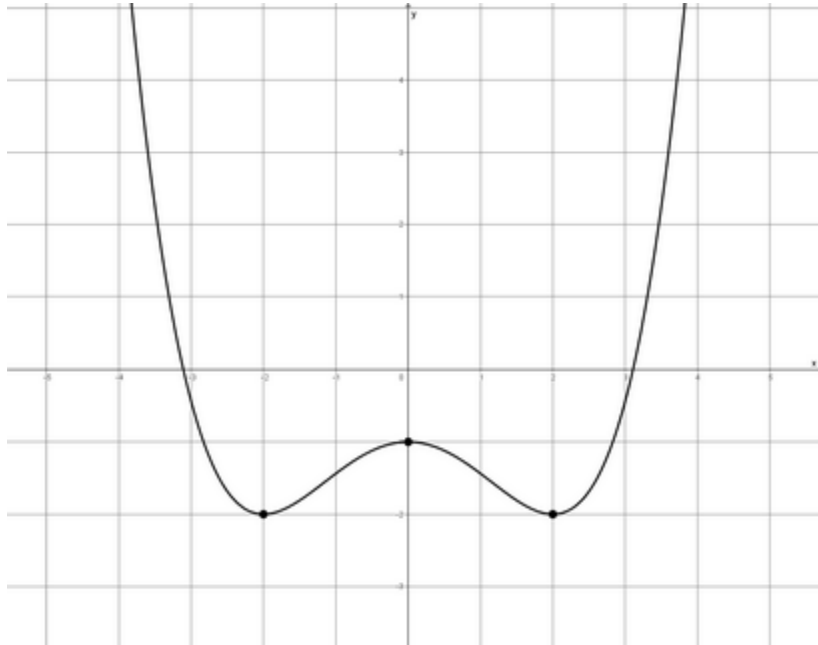
$$f(-4) = 0 \quad f(-1) = 9$$

$$S_{1/2}(-4|0) \quad S_3(-1|9)$$

2. Aufgabe

- a) Da Achsensymmetrie zur y-Achse angegeben ist, muss ein zweiter Tiefpunkt links von der y-Achse bei $T(-2|-2)$ und der mittlere von den drei Extrempunkten auf der y-Achse als Hochpunkt $H(0|1)$ liegen.

b)



- c) Der Graph kommt von oben und geht nach oben.
d) Da Achsensymmetrie zur y-Achse vorliegt, enthält die Funktionsgleichung nur Potenzen mit geraden Exponenten. $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Der Streckungsfaktor a lautet $a = \frac{1}{16}$ und die Konstante c ist mit -1 gegeben.

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 + bx^2 - 1$$

Da als einzige Unbekannte b übrig ist, kann man diese durch Einsetzen des Tiefpunktes $T(2|-2)$ berechnen.

$$-2 = \frac{1}{16} \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 - 1$$

$$-2 = 1 + 4b - 1$$

$$-2 = 4b \quad | :4$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$$

e) $f(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad | \cdot \frac{1}{16}$$

$$0 = x^4 - 8x^2 - 16$$

$$x^2 = z$$

$$0 = z^2 - 8z - 16 \quad \text{p-q-Formel ergibt } z_1 \approx 9,66 \text{ und } z_2 \approx -1,66$$

$$z = x^2$$

$$x^2 = 9,66 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 \approx 3,11$$

$$x_2 \approx -3,11$$

$$x^2 = -1,66 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{3/4} = \text{n.l.}$$

f) $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$ $f''(x_w) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ $0 = \frac{3}{4}x^2 - 1$ umformen und Wurzel ziehen ergibt

$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1$ $x_{w1} \approx 1,15$

$f'''(x) = \frac{3}{2}x$ $x_{w2} \approx -1,15$

$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$

$f'''(1,15) = 1,725 > 0 \Rightarrow R-L-K$ $f(1,15) \approx -1,55$ $W_{R-L}(1,15 | -1,55)$

$f'''(-1,15) = -1,725 < 0 \Rightarrow L-R-K$ $f(-1,15) \approx -1,55$ $W_{L-R}(-1,15 | -1,55)$

- g) 1. Ableitung Punktsymmetrie zum Ursprung
 2. Ableitung Achsensymmetrie zur y-Achse
 3. Ableitung Punktsymmetrie zum Ursprung

3. Aufgabe

1. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist für jeden x-Wert der **y-Wert 4**. Man erhält den vollständigen Punkt (2|4). Durch Einsetzen in $f(x)$ erhält man a.

$f(x) = ax^3 + 3x$
 $4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$
 $4 = 8a + 6$
 $-2 = 8a$
 $-0,25 = a$

2. Möglichkeit


$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist die **Steigung** $m = 0$. Bildet man die erste Ableitung und setzt x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f'(x) = 3ax^2 + 3$
 $0 = 3a \cdot 2^2 + 3$
 $0 = 12a + 3$
 $-3 = 12a$
 $-0,25 = a$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x) = -0,25x^3 + 3x$.

4. Aufgabe

a) $h(x) = -0,001x^3 + 0,09x^2$

1. $D = \mathbb{R}$ 2. $x \rightarrow -\infty; h(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty; h(x) \rightarrow -\infty$  3. keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind

4. $S_y(0|0)$

$h(x) = 0$

$0 = -0,001x^3 + 0,09x^2 \quad | : (-0,001)$

$0 = x^3 - 90x^2$ ausklammern

$0 = x^2(x - 90)$

$x_{1/2} = 0$; $x_3 = 90$

$S_{x1/2}(0|0)$ $S_{x3}(90|0)$

$h'(x) = -0,003x^2 + 0,18x$

$h''(x) = -0,006x + 0,18$

$h'''(x) = -0,006$

5. $h'(x) = 0$

$0 = -0,003x^2 + 0,18x$ umformen und x ausklammern ergibt

$x_1 = 0$ und $x_2 = 60$

$h'(x) = 0 \wedge h''(x) \neq 0$

$h''(0) = 0,18 > 0 \Rightarrow T$

$h(0) = 0$

$T(0|0)$

$h''(60) = -0,18 < 0 \Rightarrow H$

$h(60) = 108$

$H(60|108)$

6. $h''(x) = 0$

$0 = -0,006x + 0,18$ auflösen nach x ergibt

$x = 30$

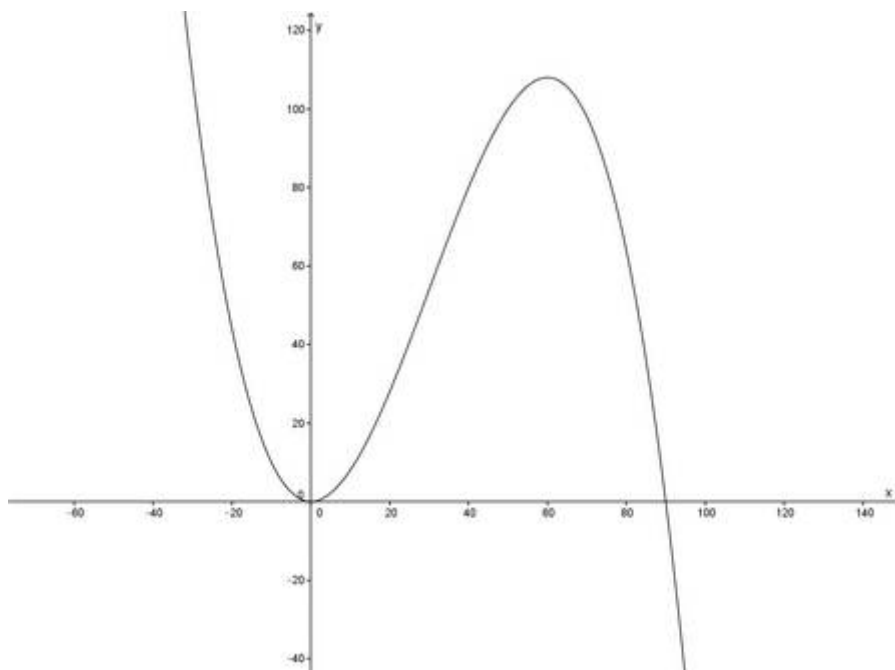
$h''(x) = 0 \wedge h'''(x) \neq 0$

$h'''(30) = -0,006 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$h(30) = 54$

$W_{L-R}(30|54)$

7. Zeichnung



b) $h(10) = 8$

Am 10. Tag ist die Sonnenblume 8 cm hoch.

c) $h(x) = 28$ Die Höhe, also der y-Wert ist gegeben.

$28 = -0,001x^3 + 0,09x^2 | - 28$

$0 = -0,001x^3 + 0,09x^2 - 28 | : (-0,001)$

$0 = x^3 - 90x^2 + 28000$ Polynomdivision mit $x_1 = 20$

$(x^3 - 90x^2 + 0x + 28000) : (x - 20) = x^2 - 70x - 1400$

p-q-Formel ergibt $x_2 \approx 86,2$ und $x_3 \approx -16,2$

Da die Beobachtung vom 0. Tag bis zum 60. Tag erfolgte, kommt nur die Lösung

$x_1 = 20$ in Frage. ($x_2 = 86,2 \notin D$ und $x_3 = -16,2 \notin D$)

Die Sonnenblume war am 20. Tag 28 cm hoch.

d) Die größte Wachstumszunahme (Steigung) erfolgte im Wendepunkt.

$h'(30) = 2,7$

Am 30. Tag wuchs die Sonnenblume mit 2,7 cm pro Tag am schnellsten.