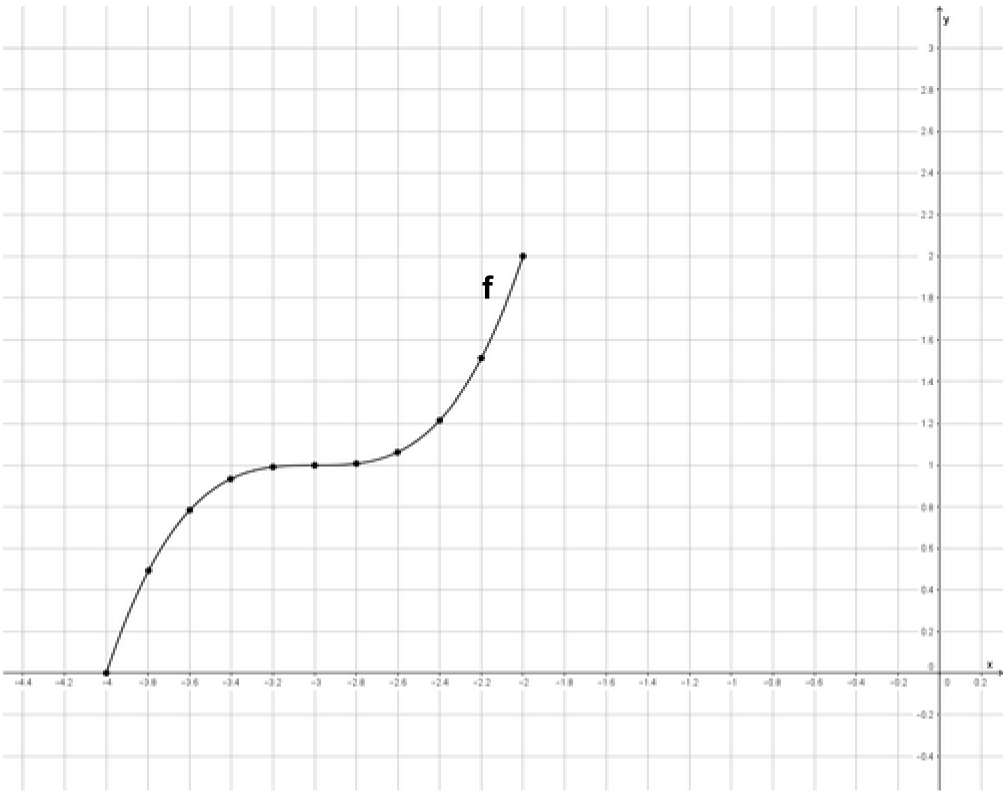
Lösungen tegut E 16

1.Aufgabe

$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 28$

a)



b) $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$ Der Graph kommt von unten und geht nach oben.

c) für das angegebene Intervall: $M_1 = [-4;-2]$ monoton steigend
oder für den gesamten Graphen: $M_1 =]-\infty;+\infty[$ monoton steigend

d) $f(x) = 0$

$0 = x^3 + 9x^2 + 27x + 28$ TR: $x_1 = -4$

Polynomdivision oder Horner-Schema führt zu $x^2 + 5x + 7 = 0$
pq-Formel ergibt negative Wurzel: $x_{2/3} = \text{n.l.}$

$S_{x1}(-4|0)$

e) $f'(x) = 3x^2 + 18x + 27$

$f''(x) = 6x + 18$

$f'''(x) = 6$

$f'(x) = 0$

$0 = 3x^2 + 18x + 27 |: 3$ und pq-Formel ergibt $x_{1/2} = -3$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(-3) = 0$ => kein Extrempunkt sondern Sattelpunkt

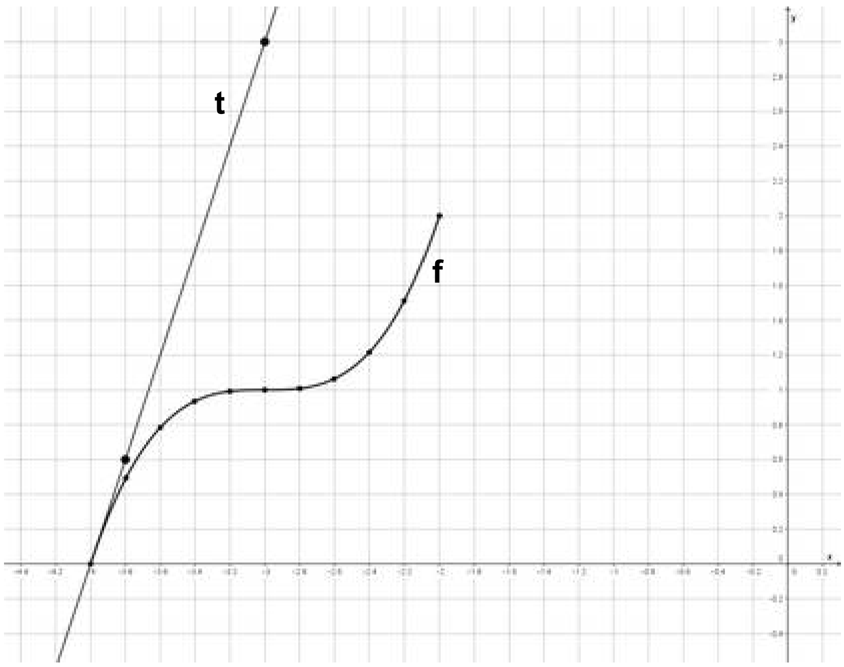
$f(-3) = 1$ Sattelpunkt $(-3|1)$

$f''(x) = 0$
$0 = 6x + 18$
$x = -3$
$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'''(-3) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$
$f(-3) = 1 \qquad W_{R-L}(-3|1)$

Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung null.

f) $S_{x1}(-4|0)$
$f'(x) = m$
$f'(x) = 3x^2 + 18x + 27$
$f'(-4) = 3$
$t(x) = m \cdot x + b$
$0 = 3 \cdot (-4) + b$
$b = 12$
$t(x) = 3x + 12$

g)



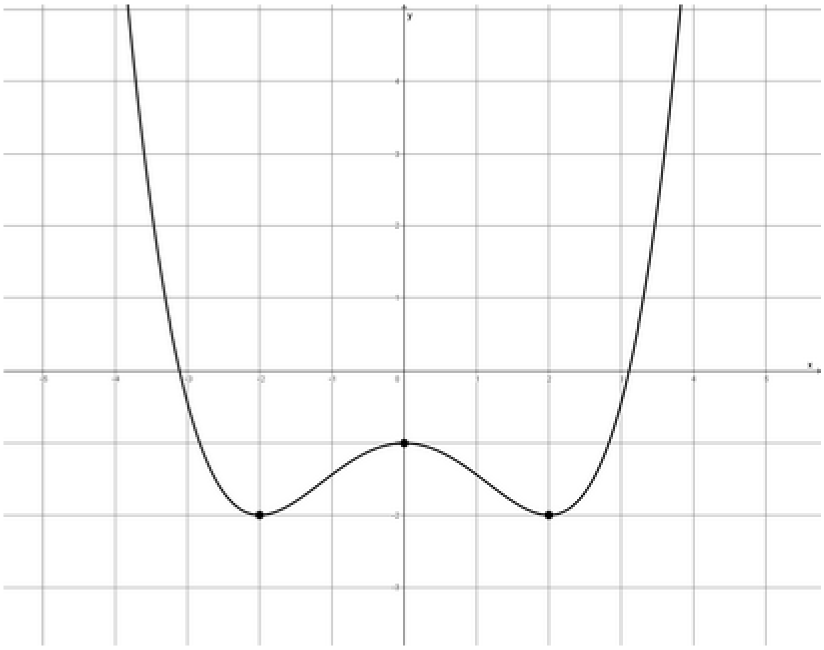
h) $\tan(\alpha) = m$
$\tan^{-1}(m) = \alpha$
$m = 3$
$\tan^{-1}(3) = \alpha$
$\alpha = 71{,}57°$

i) $f(x) = t(x)$
$x^3 + 9x^2 + 27x + 28 = 3x + 12 \,|\, -3x - 12$
$x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$
TR: $x_{1/2} = -4$ und $x_3 = -1$
$f(-4) = 0 \qquad f(-1) = 9$
$S_{1/2}(-4|0) \qquad S_3(-1|9)$

2.Aufgabe

a) Da Achsensymmetrie zur y-Achse angegeben ist, muss ein zweiter Tiefpunkt links von der y-Achse bei $T(-2|-2)$ und der mittlere von den drei Extrempunkten auf der y-Achse als Hochpunkt $H(0|-1)$ liegen.

b)



c) Der Graph kommt von oben und geht nach oben.

d) Da Achsensymmetrie zur y-Achse vorliegt, enthält die Funktionsgleichung nur Potenzen mit geraden Exponenten. $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Der Streckungsfaktor a lautet $a = \frac{1}{16}$ und die Konstante c ist mit -1 gegeben.

$f(x) = \frac{1}{16}x^4 + bx^2 - 1$

Da als einzige Unbekannte b übrig ist, kann man diese durch Einsetzen des Tiefpunktes $T(2|-2)$ berechnen.

$-2 = \frac{1}{16} \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 - 1$

$-2 = 1 + 4b - 1$

$-2 = 4b \,|: 4$

$b = -\frac{1}{2}$ => $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$

e) $f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \,\Big|: \frac{1}{16}$

$0 = x^4 - 8x^2 - 16$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 8z - 16$ p-q- Formel ergibt $z_1 \approx 9{,}66$ und $z_2 \approx -1{,}66$

$z = x^2$

$x^2 = 9{,}66 \,|\sqrt{\ }$ $x^2 = -1{,}66 \,|\sqrt{\ }$

$x_1 \approx 3{,}11$ $x_{3/4} = \text{n.l.}$

$x_2 \approx -3{,}11$

f) $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2-1$

$f'(x)=\frac{1}{4}x^3-x$

$f''(x)=\frac{3}{4}x^2-1$

$f'''(x)=\frac{3}{2}x$

$f''(x_W)=0$

$0=\frac{3}{4}x^2-1$ umformen und Wurzel ziehen ergibt

$x_{W1}\approx 1{,}15$

$x_{W2}\approx -1{,}15$

$f''(x_W)=0 \wedge f'''(x_W)\neq 0$

$f'''(1{,}15)=1{,}725>0\Rightarrow R-L-K$ $\quad f(1{,}15)\approx -1{,}55$ $\quad W_{R-L}(1{,}15|-1{,}55)$

$f'''(-1,{,}15)=-1{,}725<0\Rightarrow L-R-K$ $\quad f(-1{,}15)\approx -1{,}55$ $\quad W_{L-R}(-1{,}15|-1{,}55)$

g) 1. Ableitung Punktsymmetrie zum Ursprung
2. Ableitung Achsensymmetrie zur y-Achse
3. Ableitung Punktsymmetrie zum Ursprung

3. Aufgabe

1. Möglichkeit
$t(x)=4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist für jeden x-Wert der **y-Wert 4**. Man erhält den vollständigen Punkt (2I4). Durch Einsetzten in f(x) erhält man a.

$f(x)=ax^3+3x$

$4=a\cdot 2^3+3\cdot 2$

$4=8a+6$

$-2=8a$

$-0{,}25=a$

2. Möglichkeit
$t(x)=4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist die **Steigung** $m=0$. Bildet man die erste Ableitung und setzt x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f'(x)=3ax^2+3$

$0=3a\cdot 2^2+3$

$0=12a+3$

$-3=12a$

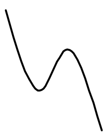
$-0{,}25=a$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x)=-0{,}25x^3+3x$.

4. Aufgabe

a) $h(x)=-0{,}001x^3+0{,}09x^2$

1. $D=R$ 2. $x\to-\infty; h(x)\to+\infty$
$x\to+\infty; h(x)\to-\infty$



3. keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind

4. $S_y(0|0)$

$h(x)=0$

$0=-0{,}001x^3+0{,}09x^2\,|:(-0{,}001)$

$0=x^3-90x^2$ ausklammern

$0=x^2(x-90)$

$x_{1/2}=0$; $x_3=90$

$S_{x1/2}(0|0)$ $\quad S_{x3}(90|0)$

$h'(x)=-0{,}003x^2+0{,}18x$

$h''(x)=-0{,}006x+0{,}18$

$h'''(x)=-0{,}006$

5. $h'(x) = 0$

$0 = -0{,}003x^2 + 0{,}18x$ umformen und x ausklammern ergibt

$x_1 = 0$ und $x_2 = 60$

$h'(x) = 0 \wedge h''(x) \neq 0$

$h''(0) = 0{,}18 > 0 \Rightarrow T$ $\quad h(0) = 0$ $\quad T(0|0)$

$h''(60) = -0{,}18 < 0 \Rightarrow H$ $\quad h(60) = 108$ $\quad H(60|108)$

6. $h''(x) = 0$

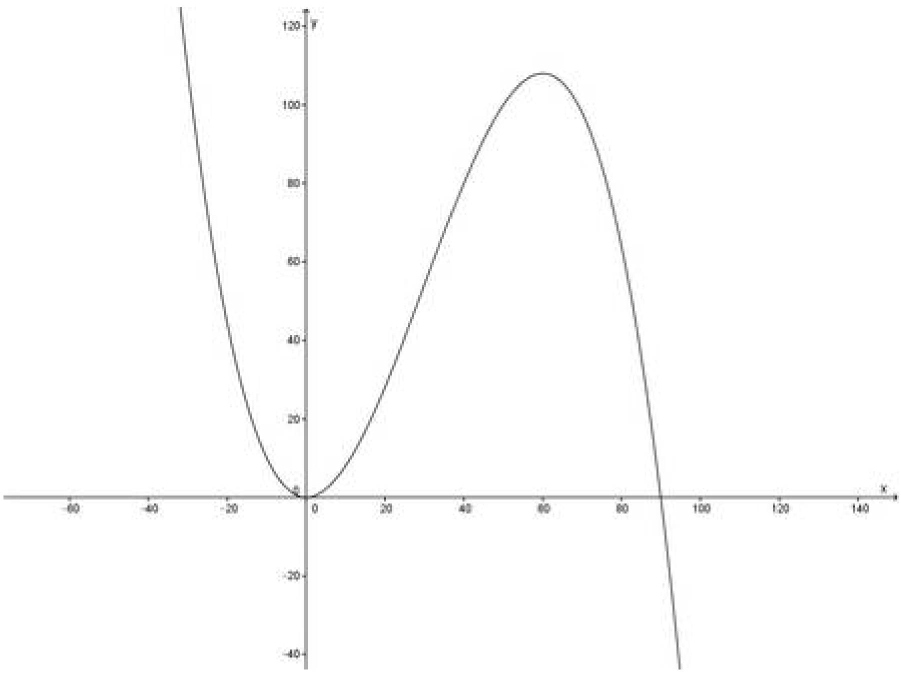
$0 = -0{,}006x + 0{,}18$ auflösen nach x ergibt

$x = 30$

$h''(x) = 0 \wedge h'''(x) \neq 0$

$h'''(30) = -0{,}006 < 0 \Rightarrow L-R-K$ $\quad h(30) = 54$ $\quad W_{L-R}(30|54)$

7. Zeichnung



b) $h(10) = 8$

Am 10. Tag ist die Sonnenblume 8 cm hoch.

c) $h(x) = 28$ Die Höhe, also der y-Wert ist gegeben.

$28 = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 \,|\, -28$

$0 = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 - 28 \,|\, : (-0{,}001)$

$0 = x^3 - 90x^2 + 28000$ Polynomdivision mit $x_1 = 20$

$(x^3 - 90x^2 + 0x + 28000) : (x - 20) = x^2 - 70x - 1400$

p-q-Formel ergibt $x_2 \approx 86{,}2$ und $x_3 \approx -16{,}2$

Da die Beobachtung vom 0. Tag bis zum 60. Tag erfolgte, kommt nur die Lösung $x_1 = 20$ in Frage. ($x_2 = 86{,}2 \notin D$ und $x_3 = -16{,}2 \notin D$)

Die Sonnenblume war am 20. Tag 28 cm hoch.

d) Die größte Wachstumszunahme (Steigung) erfolgte im Wendepunkt.

$h'(30) = 2{,}7$

Am 30. Tag wuchs die Sonnenblume mit 2,7 cm pro Tag am schnellsten.