

Lösungen Z 14

Aufgabe 1

$$f(x) = 0$$

$$0 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

$$0 = x^2 - 6x + 8$$

$$A_1 = \int_{-1}^2 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_{-1}^2$$

$$A_1 = \left[\frac{32}{3} \right] - \left[-\frac{61}{12} \right]$$

$$A_1 = 15,75 \text{ FE}$$

Polynomdivision mit $x_1 = -1$ ergibt

p-q-Formel liefert $x_2 = 4$ und $x_3 = 2$

$$A_2 = \left| \int_2^4 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) dx \right|$$

$$A_2 = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 8x \right]_2^4 \right|$$

$$A_2 = \left| \left[\frac{16}{3} \right] - \left[\frac{32}{3} \right] \right| = \left| -\frac{16}{3} \right|$$

$$A_2 = 5,3 \text{ FE}$$

$$A = A_1 + A_2 = 15,75 + 5,3 = 21,1 \text{ FE}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = p(x)$$

$$-0,5x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = 0,5x^2 - 3x + 3 \mid + 0,5x^3 - 4x^2 + 6x - 3$$

$$0 = 0,5x^3 - 3,5x^2 + 3x \mid : 0,5$$

$$0 = x^3 - 7x^2 + 6x$$

$$0 = x^2 - 7x + 6$$

$$A_1 = \int_0^1 (0,5x^3 - 3,5x^2 + 3x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$A_1 = \left[\frac{11}{24} \right] - [0]$$

$$A_1 = 0,5 \text{ FE}$$

Ausklammern von $x_1 = 0$ ergibt

p-q-Formel liefert $x_2 = 6$ und $x_3 = 1$

$$A_2 = \left| \int_1^6 (0,5x^3 - 3,5x^2 + 3x) dx \right|$$

$$A_2 = \left| \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^6 \right|$$

$$A_2 = \left| [-36] - \left[\frac{11}{24} \right] \right| = |-36,5|$$

$$A_2 = 36,5 \text{ FE}$$

$$A = A_1 + A_2 = 0,5 + 36,5 = 37 \text{ FE}$$

Aufgabe 3

$$A = \int_a^0 (x^3 - 9x) dx$$

$$A = \left[0,25x^4 - 4,5x^2 \right]_a^0$$

$$14 = [0] - [0,25a^4 - 4,5a^2]$$

$$0 = -0,25a^4 + 4,5a^2 - 14 \mid : -0,25$$

$$0 = a^4 - 18a^2 + 56$$

$$0 = z^2 - 18z + 56$$

Substitution mit $a^2 = z$

p-q-Formel liefert $z_1 = 14$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = a^2$

$$a^2 = 14 \sqrt{\quad} \quad a_1 = 3,7 \text{ und } a_2 = -3,7$$

$$a^2 = 4 \sqrt{\quad} \quad a_3 = 2 \text{ und } a_4 = -2$$

Da $a < 0$ sein soll, kommen die Lösungen $a_1 = 3,7$ und $a_3 = 2$ nicht in Frage.

Um zu klären welche der beiden übrigen Lösungen die richtige ist, muss man die Nullstellen der Funktion berechnen.

$$f(x) = 0$$

$$0 = x^3 - 9x$$

Ausklammern von $x_1 = 0$ ergibt

$$0 = x^2 - 9$$

Umformen, Wurzel ziehen liefert $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$

Da die kleinste Nullstelle bei $x_3 = -3$ liegt, entfällt die Lösung $a_2 = -3,7$. Somit ist die Grenze $a_4 = -2$ die richtige Lösung.

Aufgabe 4

a)

Da Achsensymmetrie vorliegt, kann man nur die Fläche im positiven x-Werte Bereich berechnen und dann verdoppeln.

Aus der Zeichnung kann man entnehmen, dass im Intervall $[0;2]$ noch eine Nullstelle existiert, die bei der Flächenberechnung zu berücksichtigen ist.

$$f(x) = 0$$

$$0 = x^2 - 1$$

Umformen, Wurzel ziehen liefert $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Also muss man zwei Flächen berechnen.

$$A_1 = \left| \int_0^1 (x^2 - 1) dx \right|$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$A_1 = \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^1 \right|$$

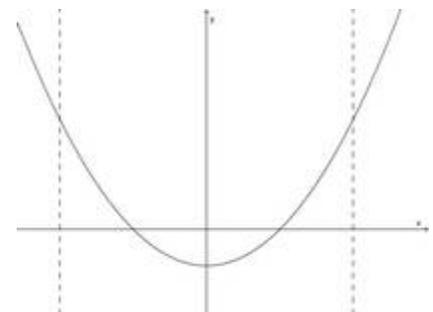
$$A_2 = \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^2$$

$$A_1 = \left| \left[-\frac{2}{3} \right] - [0] \right| = \left| -\frac{2}{3} \right|$$

$$A_2 = \left[\frac{2}{3} \right] - \left[-\frac{2}{3} \right]$$

$$A_1 = 0,7 \text{ FE}$$

$$A_2 = 1,3 \text{ FE}$$



$$A_{\text{rechts}} = A_1 + A_2 = 0,7 + 1,3 = 2 \text{ FE}$$

Die Gesamtfläche beträgt somit $A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot A_{\text{rechts}} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ FE}$

b)

Für die Volumenberechnung muss man die Funktion quadrieren. Nun spielen Nullstellen keine Rolle mehr.

$$(f(x))^2 = (x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x \right]_{-2}^2$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{46}{15} \right] - \left[-\frac{46}{15} \right] \right) \Rightarrow V = \pi \left(\frac{92}{15} \right) = 19,3 \text{ VE}$$

Aufgabe 5

Zuerst sollte man hier die Schnittpunkte und die gesamte Fläche berechnen.
Für positive Flächen muss man die obere minus die untere Funktion rechnen.

$$\begin{aligned}p(x) - g(x) &= -0,5x^2 + 1,5x + 5 - (-x + 2) \\ &= -0,5x^2 + 1,5x + 5 + x - 2 \\ &= -0,5x^2 + 2,5x + 3\end{aligned}$$

$$p(x) - g(x) = 0$$

$$0 = -0,5x^2 + 2,5x + 3 \quad | \cdot (-0,5)$$

$$0 = x^2 - 5x - 6$$

p-q-Formel liefert $x_1 = 6$ und $x_2 = -1$

$$A = \int_{-1}^6 (-0,5x^2 + 2,5x + 3) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_{-1}^6$$

$$A = [27] - \left[-\frac{19}{12} \right]$$

$$A = 28,6FE$$

a)

$$A = \int_{-1}^1 (-0,5x^2 + 2,5x + 3) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_{-1}^1$$

$$A = \left[\frac{49}{12} \right] - \left[-\frac{19}{12} \right]$$

$$A = 5,7FE$$

b)

$$A = \int_1^b (-0,5x^2 + 2,5x + 3) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 3x \right]_1^b$$

$$17,25 = \left[-\frac{1}{6}b^3 + \frac{5}{4}b^2 + 3b \right] - \left[\frac{49}{12} \right]$$

$$17,25 = -\frac{1}{6}b^3 + \frac{5}{4}b^2 + 3b - \frac{49}{12} \quad | + 17,25$$

$$0 = -\frac{1}{6}b^3 + \frac{5}{4}b^2 + 3b - \frac{64}{3} \quad | \cdot \left(-\frac{1}{6} \right)$$

$$0 = b^3 - 7,5b^2 - 18b + 128$$

Polynomdivision mit $b_1 = 4$ ergibt

$$0 = b^2 - 3,5b - 32$$

p-q-Formel liefert $b_2 = 7,7$ und $b_3 = -4,2$

Da die beiden Grenzen der Gesamtfläche berechnet sind, kann man die Lösungen $b_2 = 7,7$ und $b_3 = -4,2$ ausschließen.

Die richtige Grenze ist $b_1 = 4$.

c)

$$A_3 = A_{\text{gesamt}} - A_1 - A_2 = 28,6 - 5,7 - 17,25 = 5,65 \text{ FE}$$

Aufgabe 6

a)

Da der Flächeninhalt gesucht ist, muss man außer dem Hoch- und Tiefpunkt auch noch die Nullstellen der Funktion berechnen.

$$f(x) = 0$$

$$0 = 0,25x^4 - 2x^2 \quad | :0,25$$

$$0 = x^4 - 8x^2$$

Ausklammern von $x_{1/2} = 0$ führt zu

$$0 = x^2 - 8$$

Wurzel ziehen ergibt $x_3 = 2,8$ und $x_4 = -2,8$

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$0 = x^3 - 4x$$

Ausklammern von $x_1 = 0$ führt zu

$$0 = x^2 - 4$$

Wurzel ziehen ergibt $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$

$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{H}$$

$$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow \text{T}$$

$$f''(-2) = 8 > 0 \Rightarrow \text{T}$$

Da das Stück zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt rotieren soll, handelt es sich um das Intervall $[0;2]$.

In diesem Intervall liegen keine weiteren Nullstellen.

$$A = \left| \int_0^2 (0,25x^4 - 2x^2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{56}{15} \right] - [0] \right| = \left| -\frac{56}{15} \right|$$

$$A = 3,7 \text{ FE}$$

b)

$$(f(x))^2 = (0,25x^4 - 2x^2)^2 = (0,25x^4 - 2x^2)(0,25x^4 - 2x^2) = \frac{1}{16}x^8 - x^6 + 4x^4$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{16}x^8 - x^6 + 4x^4 \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{144}x^9 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{4}{5}x^5 \right]_0^2$$

$$V = \pi([10,9] - [0])$$

$$V = 34,2 \text{ VE}$$

Da nur der Durchmesser des Deckels angegeben ist, benötigt man den y-Wert des Tiefpunktes für die Umrechnung in cm^3 .

$$f(2) = -4$$

4 Einheiten entsprechen dem Radius (10 cm) des Deckels. => 1 LE = 2,5 cm

$$1 \text{ VE} = (2,5 \text{ cm})^3 = 15,625 \text{ cm}^3$$

$$V = 34,2 \cdot 15,625 = 534,4 \text{ cm}^3$$

c)

Dichte = Masse / Volumen

Masse = Dichte • Volumen

$$\text{Masse} = 4 \text{ g/cm}^3 \cdot 534,4 \text{ cm}^3$$

$$\text{Masse} = 2137,6 \text{ g}$$

$$\text{Masse Deckel} + \text{Masse Griff} = 2137,6 \text{ g} + 60 \text{ g} = 2197,6 \text{ g} = 2,2 \text{ kg}$$

(Auch aus diesem Grund ist der Deckel innen nicht massiv, sondern der Außenform angepasst.)