Lösungen Y 16

Aufgabe 1

$$V = \pi\int_a^b (f(x)^2)dx$$

Zuerst quadriert man die Funktion.

$$(f(x))^2 = (x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$V = \pi\int_0^3 (x^2 + 2x + 1)dx$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_0^3$$

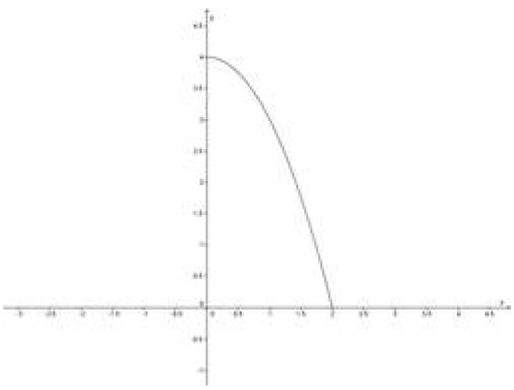
$$V = \pi([21] - [0])$$

$V = 66{,}0VE$ $\quad$ $1VE = 1cm^3$ $\quad$ $V = 66cm^3$

Aufgabe 2

a) $f(x) = 0$

$x_1 = 2$ und $x_2 = -2 \notin D$ => $[0;2]$



b)

$$(f(x))^2 = (-x^2 + 4)^2 = (-x^2 + 4)(-x^2 + 4)$$

$$= x^4 - 4x^2 - 4x^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16$$

$$V = \pi\int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16)dx$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_0^2$$

$$V = \pi\left(\left[\frac{256}{15}\right] - [0]\right)$$

$V = 53{,}6VE$ $\quad$ $1LE = 2cm$ $\quad$ $1VE = 2cm \cdot 2cm \cdot 2cm = 8cm^3$ $\quad$ $V = 53{,}6 \cdot 8 = 428{,}8cm^3$

Aufgabe 3

a) $(f(x))^2 = (x^2 - 4x + 8)^2 = (x^2 - 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$

$$= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 32x + 8x^2 - 32x + 64 = x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 64$$

$$V = \pi\int_1^4 (x^4 - 8x^3 + 32x^2 - 64x + 64)dx$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{32}{3}x^3 - 32x^2 + 64x\right]_1^4$$

$$V = \pi\left(\left[\frac{1792}{15}\right] - \left[\frac{613}{15}\right]\right)$$

$V = 246{,}9VE$ $\quad$ $1VE = 8cm^3$ $\quad$ $V = 1975{,}2cm^3$ $\quad$ $1000cm^3 = 1L$ $\quad$ $V = 2{,}0L$

b)
Die Querschnittsfläche der Vase ist die in der Zeichnung abgebildete Fläche.
Da man nur die Fläche zwischen Funktion und x-Achse berechnen kann, die gleiche Fläche aber auch unterhalb der x-Achse zum Querschnitt gehört, muss man das Ergebnis der Integralrechnung am Ende verdoppeln.

$$A_1 = \int_1^4 (x^2 - 4x + 8)dx \qquad A_{gesamt} = 2 \cdot A_1 = 2 \cdot 15 = 30FE$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right]_1^4 \qquad 1VE = 8cm^3 \text{ (3. Wurzel)} \quad 1LE = 2cm \quad 1FE = 4cm^2$$

$$A_1 = \left[\frac{64}{3}\right] - \left[\frac{19}{3}\right] \qquad A = 30 \cdot 4 = 120cm^2$$

$$A_1 = 15FE$$

<u>Aufgabe 4</u>

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 6x \qquad x = 0 \qquad f'''(0) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f(x) = 0 \qquad 0 = x(x^2 - 1) \qquad 0 = x^2 - 1$$

$$0 = x^3 - x \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \text{ und } x_3 = -1 \notin D$$

Intervall von Wendepunkt bis Nullstelle $[0;1]$

$$(f(x))^2 = (x^3 - x)^2 = (x^3 - x)(x^3 - x)$$

$$= x^6 - x^4 - x^4 + x^2 = x^6 - 2x^4 + x^2$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2)dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{8}{105}\right] - [0] \right)$$

$$V = 0{,}2VE \qquad 1LE = 3cm \qquad 1VE = 3cm \cdot 3cm \cdot 3cm = 27cm^3 \qquad V = 0{,}2 \cdot 27 = 5{,}4cm^3$$

Aufgabe 5

a)

$$\left(f(x)\right)^2 = (0{,}5x)^2 = 0{,}25x^2$$

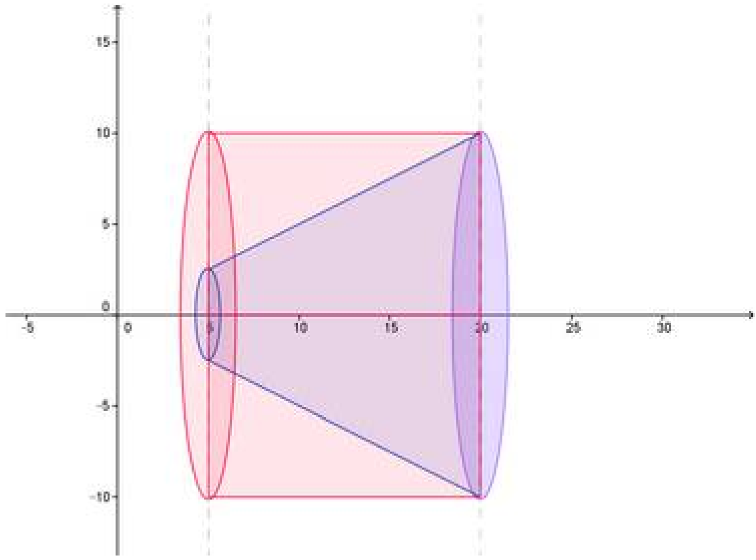
$$V = \pi\int_5^{20}(0{,}25x^2)dx$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_5^{20}$$

$$V = \pi\left(\left[\frac{2000}{3}\right]-\left[\frac{125}{12}\right]\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{2625}{4}\right) = 2061{,}7VE$$

$$V = 2061{,}7cm^3$$



b)

$$V_{Zyl.} = \pi\cdot r^2\cdot h$$

Der Radius des Zylinders ist der y-Wert der Funktion f(x) an der Stelle x = 20.

Die Höhe ist die Differenz zwischen den beiden Grenzen.

$$f(20) = 10 \quad \Rightarrow r = 10$$

$$20 - 5 = 15 \quad \Rightarrow h = 15$$

$$V_{Zyl.} = \pi\cdot 10^2\cdot 15 = 4712{,}4cm^3$$

Volumen des abgefrästen Holzes: $V = 4712{,}4 - 2061{,}7 = 2650{,}7cm^3$