

Lösungen Y 14

Aufgabe 1

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Zuerst quadriert man die Funktion.

$$(f(x))^2 = (x^2 + 3)^2 = (x^2 + 3)(x^2 + 3) = x^4 + 3x^2 + 3x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9$$

$$V = \pi \int_1^3 (x^4 + 6x^2 + 9) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + 2x^3 + 9x \right]_1^3$$

$$V = \pi([129,6] - [11,2])$$

$$V = \pi(118,4) = 372,0 \text{ VE}$$

$$V = 372 \text{ cm}^3$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{16} x^3 + \frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{16} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{4} x + \frac{3}{16} x^2 - \frac{3}{4} x + \frac{9}{4} \\ &= \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{8} x^3 + \frac{5}{8} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{8} x^3 + \frac{5}{8} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{320} x^5 - \frac{1}{32} x^4 + \frac{5}{24} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{9}{4} x \right]_1^4$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{83}{15} \right] - \left[\frac{1613}{960} \right] \right) \quad \text{Bei Rundung auf eine Kommastelle: } V = \pi([5,5] - [1,7])$$

$$V = \pi \left(\frac{1233}{320} \right) = 12,1 \text{ VE}$$

$$V = \pi(3,8) = 11,9 \text{ VE}$$

$$V = 1210 \text{ cm}^3 = 1,2 \text{ Liter}$$

$$V = 1190 \text{ cm}^3 = 1,2 \text{ Liter}$$

Aufgabe 3

$$(f(x))^2 = (x^3 + 2)^2 = (x^3 + 2)(x^3 + 2) = x^6 + 4x^3 + 4$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^6 + 4x^3 + 4) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{7} x^7 + x^4 + 4x \right]_0^1$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{36}{7} \right] - [0] \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{36}{7} \right) = 16,2 \text{ VE} \Rightarrow V = 16,2 \text{ cm}^3$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= (x^4 - 5x^3 + 7x^2)^2 = (x^4 - 5x^3 + 7x^2)(x^4 - 5x^3 + 7x^2) \\ &= x^8 - 5x^7 + 7x^6 - 5x^7 + 25x^6 - 35x^5 + 7x^6 - 35x^5 + 49x^4 \\ &= x^8 - 10x^7 + 39x^6 - 70x^5 + 49x^4 \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_{0,5}^{2,5} (x^8 - 10x^7 + 39x^6 - 70x^5 + 49x^4) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{9} x^9 - \frac{5}{4} x^8 + \frac{39}{7} x^7 - \frac{35}{3} x^6 + \frac{49}{5} x^5 \right]_{0,5}^{2,5}$$

$$V = \pi([25,8] - [0,2])$$

$$V = \pi(25,6) = 80,4 \text{ VE}$$

$$V = 80400 \text{ cm}^3 = 80,4 \text{ Liter}$$

Aufgabe 5

a)

$$(f(x))^2 = (0,5x)^2 = 0,25x^2$$

$$V = \pi \int_5^{20} (0,25x^2) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_5^{20}$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{2000}{3} \right] - \left[\frac{125}{12} \right] \right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2625}{4} \right) = 2061,7 \text{ VE}$$

b)

$$V_{\text{Zyl.}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Der Radius des Zylinders ist der y-Wert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 20$.

Die Höhe ist die Differenz zwischen den beiden Grenzen.

$$f(20) = 10 \Rightarrow r = 10$$

$$20 - 5 = 15 \Rightarrow h = 15$$

$$V_{\text{Zyl.}} = \pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 4712,4 \text{ VE}$$

Volumen des abgefrästen Holzes: $V = 4712,4 - 2061,7 = 2650,7 \text{ VE}$

