Lösungen W 14

<u>1. Aufgabe</u>

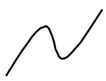
a)

$$f(x) = \frac{1}{30}x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x + 2{,}1$$

$$f'(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$$

$$f''(x) = 0{,}2x - 0{,}4$$

$$f'''(x) = 0{,}2$$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$ / $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|2{,}1)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$$0 = \frac{1}{30}x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x + 2{,}1 \,\Big|\, : \frac{1}{30}$$

$0 = x^3 - 6x^2 - 6x + 63$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$ ergibt

$0 = x^2 - 9x + 21$ p-q-Formel ergibt eine negative Wurzel => keine weiteren Lösungen

$S_{x1}(-3|0)$

5. $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$0 = 0{,}1x^2 - 0{,}4x - 0{,}2 \,|\, : 0{,}1$

$0 = x^2 - 4x - 2$ p-q-Formel ergibt $x_1 = 4{,}4$ und $x_2 = -0{,}4$

$f''(4{,}4) = 0{,}5 > 0 \Rightarrow T$ $f(4{,}4) = 0{,}2$ $T(4{,}4|0{,}2)$

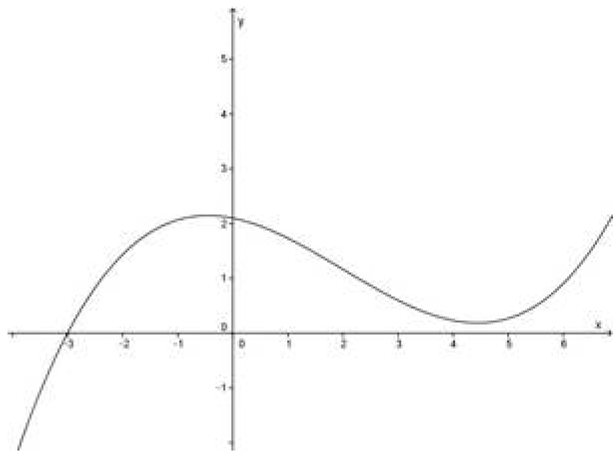
$f''(-0{,}4) = -0{,}5 < 0 \Rightarrow H$ $f(-0{,}4) = 2{,}1$ $H(-0{,}4|2{,}1)$

6. $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$0 = 0{,}2x - 0{,}4$

$x = 2$ $f'''(2) = 0{,}2 > 0 \Rightarrow R - L - K$ $f(2) = 1{,}2$ $W_{R-L}(2|1{,}2)$

7. Zeichnung



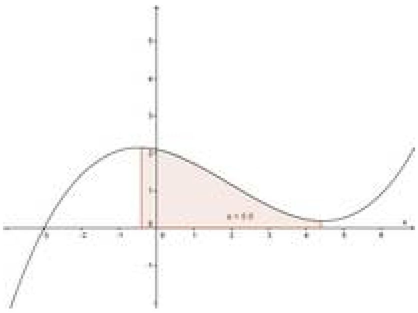
b)

Die steilste Stelle zwischen Hoch- und Tiefpunkt ist der Wendepunkt $W(2|1{,}2)$.

Die Höhe wird vom y-Wert angegeben. Da 1 LE = 1 m entspricht, liegt die steilste Stelle der Rutsche 1,2 m über dem Boden.

c)
$t(x) = m \cdot x + b$ und $W(2|1{,}2)$
$f'(x) = m$
$f'(2) = -0{,}6$
$\Rightarrow 1{,}2 = -0{,}6 \cdot 2 + b$
$b = 2{,}4$
$t(x) = -0{,}6x + 2{,}4$

d)
Da die Rutsche von Hochpunkt bis Tiefpunkt der Funktion f(x) geht, sind die Grenzen des Integrals vorgegeben.



$$A = \int_{-0{,}4}^{4{,}4} \left(\frac{1}{30}x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x + 2{,}1\right)dx$$
$$A = \left[\frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{15}x^3 - 0{,}1x^2 + 2{,}1x\right]_{-0{,}4}^{4{,}4}$$
$$A = [4{,}75] - [-0{,}85]$$
$$A = 5{,}6\text{FE}$$
Da es zwei Plakate gibt, muss der Flächeninhalt verdoppelt werden. (1 FE = 1 m²)
Der Flächeninhalt beider Plakate beträgt 11,2 m².

e)
Gesucht: maximaler Flächeninhalt des rechteckigen Spielplatzes

1. $A = x \cdot y$ Hauptbedingung

2. $60 = x + 2y$ Nebenbedingung

3. $y = 30 - 0{,}5x$ Nebenbedingung umstellen
$y = 0$
$0 = 30 - 0{,}5x$ $ID = [0;60]$ (für die Variable x, siehe Zielfunktion)
$x = 60$

4. $A(x) = x \cdot (30 - 0{,}5x)$
$A(x) = -0{,}5x^2 + 30x$ Zielfunktion

5. $A'(x) = -x + 30$
$A''(x) = -1$
$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$
$0 = -x + 30$
$x = 30$
$A''(30) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $y = 30 - 0{,}5 \cdot 30$
$y = 15$

7. $A = 30 \cdot 15$
$A = 450$

8. $A(0) = 0 < 450$
$A(60) = 0 < 450$

Der Spielplatz hat eine Länge von 30 m, eine Breite von 15 m und eine Fläche von 450 m².

2. Aufgabe

a)

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$K(2) = 68$	I	$68 = 8a + 4b + 2c + d$
$k_v'(x) = 2ax + b$	$k_v'(5) = 0$	II	$0 = 10a + b$
$k(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$	$k(4) = 21$	III	$21 = 16a + 4b + c + \frac{d}{4}$
K_{fix}	$K(0) = 36$	IV	$36 = d$

d einsetzen in I und III ergibt

I $\quad 68 = 8a + 4b + 2c + 36 \,|\, -36$

$\quad 32 = 8a + 4b + 2c$

und

III $\quad 21 = 16a + 4b + c + \frac{36}{4} \,|\, -9$

$\quad 12 = 16a + 4b + c$

I $\quad 32 = 8a + 4b + 2c$

III $\quad 12 = 16a + 4b + c \,|\cdot (-2)$

I $\quad 32 = 8a + 4b + 2c$

III $\quad -24 = -32a - 8b - 2c$

I + III ergibt

V $\quad 8 = -24a - 4b$

II $\quad 0 = 10a + b \,|\cdot 4$

V $\quad 8 = -24a - 4b$

II $\quad 0 = 40a + 4b$

V $\quad 8 = -24a - 4b$

II + V ergibt

$8 = 16a \quad \Rightarrow a = 0{,}5$

a einsetzen in II ergibt $b = -5$

a , b und d einsetzen in I ergibt $c = 24$

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 5x^2 + 24x + 36$$

b)

BO und LPU mit k(x) Stückkostenfunktion

$$k(x) = \frac{K(x)}{x}$$

$$k(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 24 + \frac{36}{x}$$

$$k'(x) = x - 5 - \frac{36}{x^2}$$

$$k''(x) = 1 + \frac{72}{x^3} \qquad k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$$

$$0 = x - 5 - \frac{36}{x^2} \,\Big|\cdot x^2$$

$0 = x^3 - 5x^2 - 36$ Polynomdivision mit $x_1 = 6$ ergibt

$0 = x^2 + x + 6$ p-q-Formel ergibt negative Wurzel

=> keine weiteren Lösungen

$k''(6) = 1{,}3 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k(6) = 18\text{GE}$

Das BO liegt bei 6 ME und die LPU bei 18 GE.

c)

$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$ variable Stückkostenfunktion

$k_v(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 24$

$k_v'(x) = x - 5$

$k_v''(x) = 1$ $\qquad$ $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = x - 5$

$x = 5\text{ME}$

$k_v''(5) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$k_v(5) = 11{,}5\text{GE}$

Die KPU liegt bei 11,5 GE.

d)

Je ME kann ein Preis von 55,5 GE verlangt werden. =>

$p(x) = 55{,}5$

$E(x) = 55{,}5x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 55{,}5x - (0{,}5x^3 - 5x^2 + 24x + 36)$

$G(x) = -0{,}5x^3 + 5x^2 + 31{,}5x - 36$

GS / GG

$G(x) = 0$

$0 = -0{,}5x^3 + 5x^2 + 31{,}5x - 36 \,|\, : (-0{,}5)$

$0 = x^3 - 10x^2 - 63x + 72$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ liefert

$0 = x^2 - 9x - 72$ $\qquad$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 14{,}1$ und $[x_3 = -5{,}1]$

GS = 1 ME

GG = 14,1 ME

G_{max}

$G'(x) = -1{,}5x^2 + 10x + 31{,}5$ $\qquad$ $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(x) = -3x + 10$

$0 = -1{,}5x^2 + 10x + 31{,}5 \,|\, : (-1{,}5)$

$0 = x^2 - \frac{20}{3}x - 21$ $\qquad$ p-q-Formel ergibt $x_1 = 9$ und $[x_2 = -2{,}3]$

$G''(9) = -17 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(9) = 288\text{GE}$

$C\left(x_{G\max} \,|\, p(x_{G\max})\right)$

$p(9) = 55{,}5\text{GE}$

$C(9 \,|\, 55{,}5)$

Der Cournot'sche Punkt gibt die gewinnmaximale Menge und den zugehörigen Preis pro ME an, mit dem der maximale Gewinn erreicht wird.

3. Aufgabe

$g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

1 $N(x) = 0$ $\Rightarrow D = R \setminus \{-2\}$
$\Rightarrow x = -2$

2 $g(0) = -0{,}5$ $\Rightarrow S_y(0|-2)$
$g(x) = 0$
$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow S_x(0{,}3|0)$ (keine Übereinstimmung mit Definitionsbereich)

3 keine behebbare Lücke (keine Ersatzfunktion, da keine Übereinstimmung mit Def.)

4 x = -2 ist Pol

$$\left.\begin{array}{l} l-\lim\limits_{x\to-2} g(x) = +\infty \\ \\ r-\lim\limits_{x\to-2} g(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Pol mit VZW

5 Zg = Ng

$(3x-1):(x+2) = 3 + \frac{-7}{x+2}$ $\Rightarrow y_A = 3$

$\underline{-(3x+6)}$
-7

$x \to -\infty; R(x) > 0$ Annäherung von oben
$x \to +\infty; R(x) < 0$ Annäherung von unten

6 KS
7 Zeichnung