Lösungen V 16

Aufgabe 1

a)

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $36 = 2x + 2y$ da 30 m Zaun + 4 m + 2 m Hauswand

3. $y = 18 - x$

$y = 0$

$x = 18$ => $D = [0;18]$

4. $A(x) = x \cdot (18 - x)$

$A(x) = -x^2 + 18x$ **Zielfunktion**

5. $A'(x) = -2x + 18$

$A''(x) = -2$

$A'(x) = 0$

$0 = -2x + 18$

$x = 9$

$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(9) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max.

6. $y = 18 - 9$

$y = 9$

7. $A = 9 \cdot 9$

$A = 81$

8. $A(0) = 0 < 81$

$A(24) = 0 < 81$

Der Freilauf muss 9 m breit und lang sein, damit er eine maximale Fläche von 81 m² erhält.

b)

Ein Stück ist 9 m und das andere 21 m lang.

Aufgabe 2

a)

$E(x) = -55x^2 + 660x$

$p(x) = -55x + 660$

$p(x) = 0$

$x = 12ME$ => $D_{ök} = [0;12]$

b)

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -55x^2 + 660x - (x^3 - 12x^2 + 50x + 800)$

$G(x) = -55x^2 + 660x - x^3 + 12x^2 - 50x - 800$

$G(x) = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800$

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 - 43x^2 + 610x - 800 \,|: (-1)$

$0 = x^3 + 43x^2 - 610x + 800$

Polynomdivision mit $x_1 = 10$ ergibt $x^2 + 53x - 80 = 0$

Mit pq-Formel erhält man $x_2 = 1{,}5$ und $x_3 = -54{,}5 \notin D_{ök}$

GS = 1,5 ME

GG = 10 ME

c)

$G'(x) = -3x^2 - 86x + 610$

$G''(x) = -6x - 86$

$G'(x) = 0$

$x_1 = 5{,}9ME$

$x_2 = -34{,}6 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(5{,}9) = -121{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$x_{G\max} = 5{,}9ME$

d)

$G(5{,}9) = 1096{,}8GE$

$G_{max} = 1096{,}8GE$ Gewinn aus Aufgabe c)

$p(x) = -21x + 483$

$E(x) = -21x^2 + 483x$

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 1000$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -x^3 - 9x^2 + 433x - 1000$

$G(5{,}9) = 1036GE$

Der Gewinn bei 5,9 ME liegt nun um 60,8 GE niedriger.
In etwa könnte man sagen, dass der Gewinn gleich geblieben ist.

Aufgabe 3

a)

$K'(x) = 6x^2 - 22x + 9$

$K(x) = 2x^3 - 11x^2 + 9x + K_{fix}$ mit $(10|1206)$ ergibt sich $1206 = 2 \cdot 10^3 - 11 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + K_{fix}$

=> $K_{fix} = 216GE$

$K(x) = 2x^3 - 11x^2 + 9x + 216$

b)

$E'(x) = -34x + 387$

$E(x) = -17x^2 + 387x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -17x^2 + 387x - (2x^3 - 11x^2 + 9x + 216)$

$G(x) = -17x^2 + 387x - 2x^3 + 11x^2 - 9x - 216$

$G(x) = -2x^3 - 6x^2 + 378x - 216$

$G(x) = 0$

$0 = -2x^3 - 6x^2 + 378x - 216 \,|\, :(-2)$

$0 = x^3 + 3x^2 - 189x + 108$

Polynomdivision mit $x_1 = 12$ ergibt $x^2 + 15x - 9 = 0$

Mit pq-Formel erhält man $x_2 = 0{,}6$ und $x_3 = -15{,}6 \notin D_{ök}$

GS = 0,6 ME

GG = 12 ME

c)

$G'(x) = -6x^2 - 12x + 378$

$G''(x) = -12x - 12$

$G'(x) = 0$

$x_1 = 7ME$

$x_2 = -9 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(7) = -96 < 0 \Rightarrow$ Max.

$G(7) = 1450GE$

$G_{max} = 1450GE$

d)

$C\left(x_{G\,max} \middle| p(x_{G\,max})\right)$

$p(x) = -17x + 387$

$p(7) = 268GE$

$C\left(7 \middle| 268\right)$

Aufgabe 4

Nullstellen und Schnittpunkte berechnen

$f(x) = 0$	$g(x) = 0$	$f(x) = g(x)$
$x_1 = 0$ und $x_2 = 6$	$x = 6$	$x_1 = 2$ und $x_2 = 6$

1. Gesamtfläche berechnen; 2. obere Teilfläche berechnen mit zusammengesetzter Funktion;
3. untere Teilfläche als Differenz berechnen

$A = \int_0^6 (-2x^2 + 12x)dx$

$A = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^6$

$A = [72] - [0]$

$A = 72FE$

$A_2 = \int_2^6 (-2x^2 + 16x - 24)dx$

$A_2 = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x^2 - 24x \right]_2^6$

$A_2 = [0] - \left[-\frac{64}{3} \right]$

$A_2 = \frac{64}{3}FE$

$A_1 = A - A_2 = 72 - \frac{64}{3} = \frac{152}{3}FE$

1 LE = 1 cm

Die unter Teilfläche besitzt 50,7 cm² und die obere Teilfläche 21,3 cm².

Aufgabe 5

1. HB $A = 2x \cdot y$

2. NB $300 = 2x + 3y$ Umfang + 25 m Felswand

3. $y = 100 - \frac{2}{3}x$

$y = 0$

$x = 150$ => $D = [0;150]$

4. $A(x) = 2x \cdot \left(100 - \frac{2}{3}x\right)$

$A(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 200x$ **Zielfunktion**

5.
$A'(x) = -\frac{8}{3}x + 200$

$A''(x) = -\frac{8}{3}$

$A'(x) = 0$

$x = 75$

$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(75) = -\frac{8}{3} < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $y = 100 - \frac{2}{3} \cdot 75$

$y = 50$

7. $A = 2 \cdot 75 \cdot 50$

$A = 7500$

8. $A(0) = 0 < 7500$

$A(150) = 0 < 7500$

Die Felder sind jeweils 75 m lang und 50 m breit und besitzen zusammen eine maximale Gesamtfläche von 7500 m².

Aufgabe 6

Nullstellen von $f_1(x)$ ablesen

$x_1 = 0$ und $x_2 = 12$

$A_1 = \int_0^{12} (-0{,}3x^2 + 3{,}6x)dx$

$A_1 = \left[-0{,}1x^3 + 1{,}8x^2\right]_0^{12}$

$A_1 = [86{,}4] - [0]$

$A_1 = 86{,}4 \text{FE}$

$f_2(x) = 0$

$x_1 = 2$ und $x_2 = 10$

$A_2 = \int_2^{10} (-0{,}6x^2 + 7{,}2x - 12)dx$

$A_2 = \left[-0{,}2x^3 + 3{,}6x^2 - 12x\right]_2^{10}$

$A_2 = [40] - [-11{,}2]$

$A_2 = 51{,}2 \text{FE}$

$A = A_1 - A_2 = 86{,}4 - 51{,}2 = 35{,}2 \text{FE}$

1 LE = 1 cm

Der Streifen besitzt eine Fläche von 35,2 cm².

Aufgabe 7

a)

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $f(x) = -0{,}25x^2 - 0{,}5x + 6$

3. $f(x) = 0$

$x_1 = 4$ und $x_2 = -6 \notin D \quad \Rightarrow D = [0;4]$

4. $A(x) = x \cdot (-025x^2 - 0{,}5x + 6)$

$\boxed{A(x) = -0{,}25x^3 - 0{,}5x^2 + 6x}$ **Zielfunktion**

5.
$A'(x) = -0{,}75x^2 - x + 6$

$A''(x) = -1{,}5x - 1$

$A'(x) = 0$

$x_1 = 2{,}2$

$x_2 = -3{,}6 \notin D$

$A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(2{,}2) = -4{,}3 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $f(2{,}2) = 4{,}2$

7. $A = 2{,}2 \cdot 4{,}2$
$A = 9{,}24$

8. $A(0) = 0 < 9{,}24$
$A(4) = 0 < 9{,}24$

1 LE = 2 m; 1 FE = 4 m²
Das Beet ist 4,4 m lang, 8,4 m breit und hat eine maximale Fläche von 37 m².

Aufgabe 8

Tangentengleichung erstellen

$t(x) = m \cdot x + b$ $\quad f(x) = -0{,}25x^2 - 0{,}5x + 6 \quad f(1) = 5{,}25$ y-Wert

$x = 1 \quad f'(x) = -0{,}5x - 0{,}5 \quad f'(1) = -1$ Steigung m

$5{,}25 = -1 \cdot 1 + b$

$b = 6{,}25 \quad t(x) = -x + 6{,}25$

Für die Entfernung (immer waagrecht gemessen) muss man die Nullstellen der beiden Funktionen berechnen.

$f(x) = 0$ **=>** $x_1 = 4$ und $x_2 = -6 \notin D$ (aus Aufgabe 7)

$t(x) = 0$ => $x = 6{,}25$

Entfernung = 6,25 – 4 = 2,25 LE
Da in Aufgabe 7 1 LE = 2 m ist, ergibt sich eine Entfernung von 4,5 m.