

Lösungen U 16

1. Aufgabe

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,3x - 1,5$$

a) $f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 1,3$

$$f''(x) = -0,6x + 0,6$$

$$f'''(x) = -0,6$$

1. $D = \mathbb{R}$ 2. $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow -\infty$ 3. KS 4. $S_y(0|-1,5)$ und für S_x $f(x) = 0 \Rightarrow$

$$0 = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,3x - 1,5 \quad | :(-0,1)$$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 2x - 15$

$$0 = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

p-q liefert $x_2 = 5$ und $x_3 = -3$

$$S_{x_1}(1|0) \quad S_{x_2}(5|0) \quad S_{x_3}(-3|0)$$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0$

1. Schritt $f'(x) = 0$

$$0 = -0,3x^2 + 0,6x + 1,3 \quad | :(-0,3)$$

p-q ergibt $x_1 = 3,3$ und $x_2 = -1,3$

$$0 = x^2 - 2x - \frac{13}{3}$$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(3,3) = -1,4 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f''(-1,3) = 1,4 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

3. Schritt

$$f(3,3) = 2,5$$

$$f(-1,3) = -2,5$$

$$H(3,3|2,5)$$

$$T(-1,3|-2,5)$$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0$

1. Schritt $f''(x) = 0$

$$0 = -0,6x + 0,6$$

$$x = 1$$

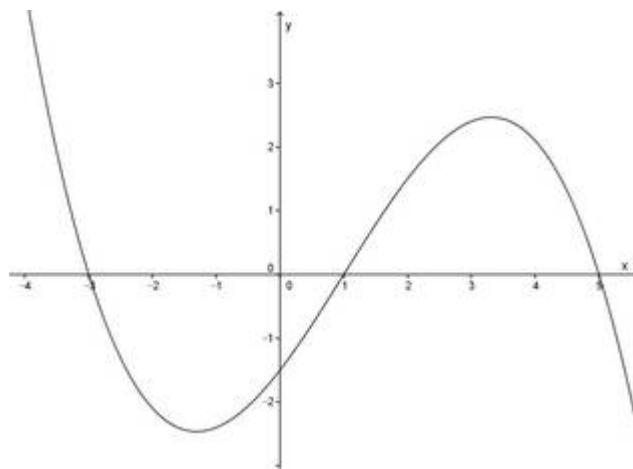
2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = -0,6 < 0 \Rightarrow \text{L-R-K}$$

3. Schritt

$$f(1) = 0 \quad W_{L-R}(1|0)$$

7. Zeichnung



- b) Über den Start werden keine genauen Angaben gemacht. Aber für das Ziel erhält man die Angabe der Steigung. Also muss man erst die Stelle des Ziels herausfinden und dann den Start.

$$-1,1 = -0,3x^2 + 0,6x + 1,3 \quad | +1,1$$

$$m = -1,1 \text{ und } f'(x) = m \text{ ergibt } 0 = -0,3x^2 + 0,6x + 2,4 \quad | :(-0,3)$$

$$0 = x^2 - 2x - 8$$

lösen mit p-q-Formel

$$x_1 = 4 \text{ und } x_2 = -2$$

Da man die Stelle benötigt, an der die Steigung das zweite Mal vorkommt, liegt das Ziel bei $x = 4$.

800 Meter vor dem Ziel, heißt: $800 \text{ m} : 100 \text{ m/LE} = 8 \text{ LE}$

$(4-8 = -4) \Rightarrow 8 \text{ LE links vor dem Ziel liegt die Stelle } x = -4$. Dort ist der Start.

- c) Die steilste Stelle zwischen Hoch- und Tiefpunkt ist der Wendepunkt. $W(1|0)$ wurde schon in der Kurvendiskussion berechnet und kann direkt übernommen werden.

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 1,3$$

$$f'(1) = 1,6$$

Die steilste Stelle ist der Wendepunkt $W(1|0)$ mit der Steigung $m = 1,6$.

- d) Für die Höhendifferenz benötigt man die y-Werte des Start- und Zielpunktes.

$$f(-4) = 4,5$$

$$4,5 - 2,1 = 2,4 \quad \text{Umrechnung mit } 1 \text{ LE} = 10 \text{ m ergibt: } 24 \text{ m}$$

$$f(4) = 2,1$$

Das Ziel liegt 24 Meter tiefer als der Start.

- e) Erstellen der Geradengleichung mit :
Variante 1

$$\text{der Steigungsformel: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Einsetzen der Punkte $(1|3)$ und $(-1|3,6)$:

$$m = \frac{3,6 - 3}{-1 - 1} \text{ ergibt eine Steigung von}$$

$$m = -0,3.$$

Punkt $(1|3)$ und m einsetzen in $y = m \cdot x + b$

führt zu $3 = -0,3 \cdot 1 + b$ mit $b = 3,3$.

Also stimmt die Geradengleichung.

$$g(x) = -0,3x + 3,3$$

Variante 2

Rekonstruktion: $g(x) = ax + b$

A M Gl.

$$(1|3) \quad f(1) = 3 \quad | \quad 3 = a + b$$

$$(-1|3,6) \quad f(-1) = 3,6 \quad || \quad 3,6 = -a + b$$

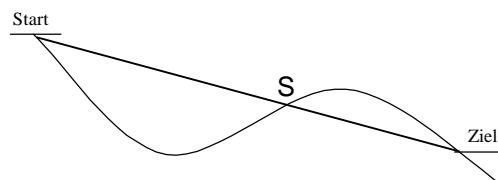
Addition ergibt $6,6 = 2b \Rightarrow b = 3,3$

Einsetzen von b in I ergibt $a = -0,3$

Also stimmt die Geradengleichung.

$$g(x) = -0,3x + 3,3$$

- f) Da die Gerade Start und Ziel verbindet, und der Abstand zwischen $f(x)$ und $g(x)$ im Bereich Start bis S größer ist als der Abstand im Bereich S bis Ziel, muss man, um einen positiven Wert zu erhalten, für die Extremwertberechnung folgende Hauptbedingung festlegen:



$$d = g(x) - f(x) \quad (d \text{ steht hier für Differenz, Abstand})$$

Die Nebenbedingungen sind die beiden Funktionen $g(x)$ und $f(x)$.

$$g(x) = -0,3x + 3,3$$

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,3x - 1,5$$

Der Definitionsbereich ergibt sich aus der Angabe „von Start bis Ziel“, also $D = [-4; 4]$

Für die Zielfunktion müssen beide Nebenbedingungen in die Hauptbedingung eingesetzt werden.

$$d(x) = -0,3x + 3,3 - (-0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,3x - 1,5)$$

$$d(x) = -0,3x + 3,3 + 0,1x^3 - 0,3x^2 - 1,3x + 1,5$$

$$d(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 1,6x + 4,8 \quad \text{Zielfunktion}$$

Zur Berechnung der x-Werte muss die Zielfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} d'(x) &= 0,3x^2 - 0,6x - 1,6 & d'(x) &= 0 & 0 &= 0,3x^2 - 0,6x - 1,6 \quad | : 0,3 \\ d''(x) &= 0,6x - 0,6 & & & 0 &= x^2 - 2x - \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Mit p-q-Formel ergeben sich die Lösungen: $x_1 = 3,5$ und $x_2 = -1,5$

Da beide im Definitionsbereich liegen, müssen auch beide überprüft werden.

$$d'(x) = 0 \wedge d''(x) \neq 0$$

$$d''(3,5) = 1,5 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$d''(-1,5) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

Einsetzen in die Nebenbedingungen:

$$g(-1,5) = 3,8$$

$$f(x) = -2,4$$

Durch Einsetzen in die Hauptbedingung erhält man:

$$d = 3,8 - (-2,4) = 6,2$$

Überprüfen der Ränder (Einsetzen der Werte aus dem Definitionsbereich in die Zielfunktion)

$$d(-4) = 0 < 6,2$$

$$d(4) = 0 < 6,2$$

Der maximale Abstand beträgt 62 m. (1 LE = 10 m)

- g) In Aufgabe f) sieht man in der Skizze, dass es zwischen Start und Ziel noch den Schnittpunkt S gibt. Also muss man erst durch Gleichsetzen der beiden Funktionen diesen Schnittpunkt ermitteln.

$$f(x) = g(x)$$

$$-0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,3x - 1,5 = -0,3x + 3,3 \quad | + 0,3x - 3,3$$

$$-0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,6x - 4,8 = 0 \quad \text{Funktion zum Integrieren}$$

Bei der Integralrechnung spielt es keine Rolle, auf welche Seite man umformt. Man hat am Ende der Rechnung immer die Möglichkeit, eine negative Fläche mittels Betragstriche ins Positive zu verwandeln.

$$-0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,6x - 4,8 = 0 \quad | : (-0,1)$$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ (Ziel) ergibt $x^2 + x - 12$

$$x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$$

mit p-q erhält man $x_2 = 3$ (Schnittstelle) und $x_3 = -4$ (Start)

$$A = \int_3^4 (-0,1x^3 + 0,3x^2 + 1,6x - 4,8) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{40}x^4 + 0,1x^3 + 0,8x^2 - 4,8x \right]_3^4$$

$$A = [-6,4] - [-6,525]$$

$$A = 0,125 \text{ FE}$$

Umrechnung mit 1 LE = 100 m und 1 LE = 10 m ergibt 1 FE = 1000 m².

$$A = 125 \text{ m}^2$$

2. Aufgabe

$h(x) = ax^2 + b$ da AS! (keine spiegelgleichen Punkte verwenden)

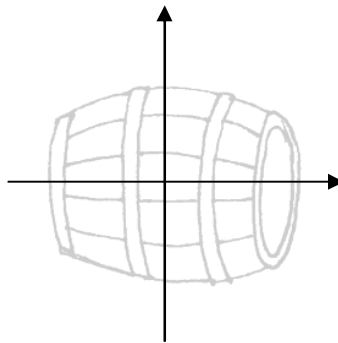
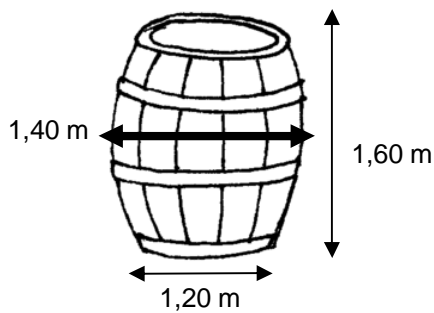
A	M	Gl.
(0 5)	$h(0) = 5$	I $5 = b$
(5 0)	$h(5) = 0$	II $0 = 25a + b$

b einsetzen in II ergibt $a = -\frac{1}{5}$

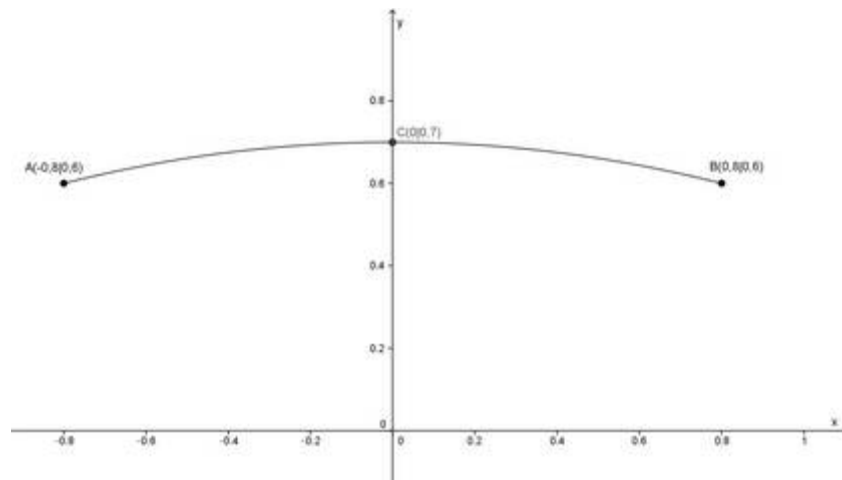
$$h(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 5$$

3. Aufgabe

a)



http://media.4teachers.de/images/thumb/image_thumb_4939.png



b)

$f(x) = ax^2 + b$ da AS! (keine spiegelgleichen Punkte verwenden)

A	M	Gl.
(0 0,7)	$h(0) = 0,7$	I $0,7 = b$
(0,8 0,6)	$h(0,8) = 0,6$	II $0,6 = 0,64a + b$

b einsetzen in II ergibt $a = -\frac{5}{32}$

$$f(x) = -\frac{5}{32}x^2 + 0,7$$

c)

$$(f(x))^2 = \left(-\frac{5}{32}x^2 + 0,7\right)^2$$

$$(f(x))^2 = \frac{25}{1024}x^4 - \frac{7}{32}x^2 + 0,49$$

$$V = \pi \cdot \int_{-0,8}^{0,8} \left(\frac{25}{1024}x^4 - \frac{7}{32}x^2 + 0,49\right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{5}{1024}x^5 - \frac{7}{96}x^3 + 0,49x\right]_{-0,8}^{0,8}$$

$$V = \pi \cdot \left(\left[\frac{668}{1875}\right] - \left[-\frac{668}{1875}\right]\right)$$

$$V = 2,2VE$$

$$1 VE = 1 m^3$$

$$V = 2,2m^3$$

4. Aufgabe

a) $K'(x)$ ableiten, K_{fix} aus der Gewinnfunktion als positiven Wert entnehmen, $K(x)$ bilden
Erlösfunktion ermitteln, Preis-Absatz-Funktion formulieren, $D_{ök}$ berechnen

$$K'(x) = 1,5x^2 - 2x + 1 \quad K_{fix} = 40GE$$

$$K(x) = 0,5x^3 - x^2 + x + 40$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$E(x) = G(x) + K(x)$$

$$E(x) = -0,5x^3 - x^2 + 32x - 40 + 0,5x^3 - x^2 + x + 40$$

$$E(x) = -2x^2 + 33x$$

$$p(x) = -2x + 33$$

$$p(x) = 0$$

$$x = 16,5ME \text{ Sättigungsmenge} \Rightarrow D_{ök} = [0,16,5]$$

b) $E'(x) = -4x + 33$ $E'(x) = 0$ $E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$ $E(8,25) = 136,1GE$
 $E''(x) = -4$ $x = 8,25ME$ $E''(8,25) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $E_{max} = 136,1GE$

c) $G'(x) = -1,5x^2 - 2x + 32$ $G'(x) = 0$ $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $G(5,3) = 27,1GE$
 $G''(x) = -3x - 2$ $x_1 = 5,3ME$ $G''(5,3) = -17,9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $G_{max} = 27,1GE$
 $x_2 = -4 \notin D_{ök}$

Rechnet man mit dem Bruch für x_1 weiter, erhält man ein etwas abweichendes Ergebnis.

$$x_1 = \frac{16}{3}ME \quad G''\left(\frac{16}{3}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Max.} \quad G\left(\frac{16}{3}\right) = 26,4GE$$