

Lösungen S 13

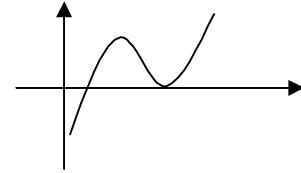
1. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 4$

$$f(x) = 0$$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 8x + 16$

p-q ergibt $x_{2/3} = 4$



$$A = \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 6x - 4 \right) dx$$

$$A = [0] - \left[-\frac{27}{16} \right]$$

$$A = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^4$$

$$A = \frac{27}{16} = 1,7 \text{ FE}$$

2. Aufgabe

Fläche zwischen den beiden Tiefpunkten => Extrempunkte und Nullstellen berechnen

$f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$ biquadratische Funktion, also achsensymmetrisch (Substitution)

Nullstellen mit $f(x) = 0$

$$0 = x^4 - 20x^2 + 64 \quad \text{Befehl } x^2 = z$$

$$0 = z^2 - 20z + 64$$

p-q ergibt $z_1 = 16$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = x^2$ und Wurzel ziehen

$$x_1 = 4 ; x_2 = -4 ; x_3 = 2 ; x_4 = -2$$

Extrempunkte mit $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

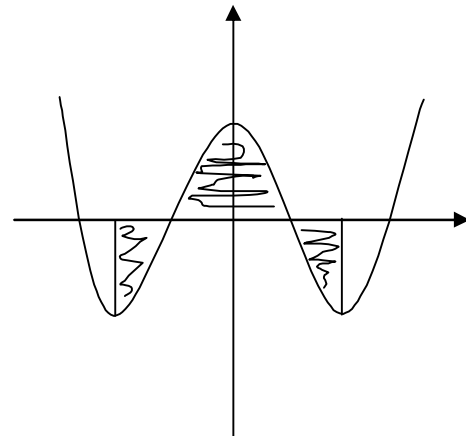
$$f'(x) = 4x^3 - 40x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 40$$

x ausklammern ergibt $x_1 = 0$

Wurzelziehen führt zu $x_2 = 3,2$ und $x_2 = -3,2$

Überprüfung in zweiter Ableitung ergibt Tp bei $x = 3,2$ und $x = -3,2$ Hp bei $x = 0$



Berechnung der schraffierten Fläche:

Wegen der Achsensymmetrie berechnet man nur die rechte Seite.

$$A_1 = \int_0^2 (x^4 - 20x^2 + 64) dx$$

$$A_2 = \left| \int_2^4 (x^4 - 20x^2 + 64) dx \right|$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + 64x \right]_0^2$$

$$A_2 = \left| \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{20}{3}x^3 + 64x \right]_2^4 \right|$$

$$A_1 = \left[81 \frac{1}{15} \right] - [0]$$

$$A_1 = \left| [53,5] - \left[81 \frac{1}{15} \right] \right|$$

$$A_1 = 81,1 \text{ FE}$$

$$A_2 = |-27,6|$$

$$A_2 = 27,6 \text{ FE}$$

$$A_{\text{ges}} = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot (81,1 + 27,6) = 217,4 \text{ FE}$$

3. Aufgabe

Fläche zwischen zwei Funktionen => Schnittpunkte

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0,4x^3 - 2,6x^2 + 4x$$

$$0 = 0,6x^3 - 5,4x^2 + 12x \quad \text{aufzuleitende Funktion}$$

$$x \text{ ausklammern ergibt } x_1 = 0$$

$$p\text{-q ergibt } x_2 = 5 \text{ und } x_3 = 4$$

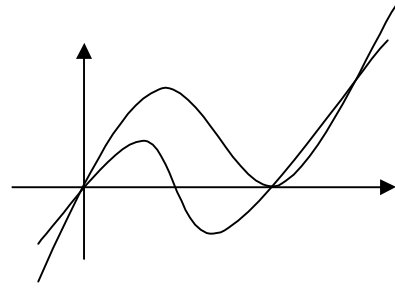
$$A_1 = \int_0^4 (0,6x^3 - 5,4x^2 + 12x) dx$$

$$A_1 = [0,15x^4 - 1,8x^3 + 6x^2]_0^4$$

$$A_1 = [19,2] - [0]$$

$$A_1 = 19,2 \text{ FE}$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 = 19,2 + 0,5 = 19,7 \text{ FE}$$



$$A_2 = \left| \int_4^5 (0,6x^3 - 5,4x^2 + 12x) dx \right|$$

$$A_2 = \left| [0,15x^4 - 1,8x^3 + 6x^2]_4^5 \right|$$

$$A_2 = |[18,75] - [19,2]|$$

$$A_2 = |-0,45|$$

$$A_2 = 0,5 \text{ FE}$$

4. Aufgabe

Auch wenn eine Grenze nicht bekannt ist, kann man ableiten.

$$f(x) = 4x^3 - 6x \quad \text{mit } [2 : b] \quad \text{und } b > 0 \quad \text{sowie } A = 50 \text{ FE}$$

$$A = \int_2^b (4x^3 - 6x) dx$$

$$A = [x^4 - 3x^2]_2^b$$

$$50 = [b^4 - 3b^2] - [4]$$

$$50 = b^4 - 3b^2 - 4 \quad | -50$$

$$0 = b^4 - 3b^2 - 54$$

$$b_2 = z$$

Substitution lösen mit p-q ergibt

$$z_1 = 9 \quad \text{und} \quad z_2 = -6$$

Resubstitution mit $z = b^2$

$$b^2 = 9 \sqrt{\quad} \quad \text{und} \quad b^2 = -6 \sqrt{\quad}$$

$$b_1 = 3 \quad \text{nicht lösbar}$$

$$[b_2 = -3]$$

Die obere Grenze b hat also einen Wert von +3.

5. Aufgabe

Fläche mit x-Achse => Nullstellen

$$f(x) = 0$$

$$0 = -x^2 + 2x + 3 \quad | :(-1)$$

$$\text{lösen mit p-q ergibt } x_1 = 3 \quad \text{und} \quad [x_2 = -1]$$

Da sich die Fläche nur im ersten Quadranten befinden soll (untere Grenze bei 0), entfällt die zweite Nullstelle.

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^3$$

$$A = [9] - [0]$$

$$A = 9 \text{ FE}$$

6. Aufgabe

$$\text{a) } A = \int_0^1 (x + 21,5) dx \quad A = [22] - [0]$$

$$A = [0,5x^2 + 21,5x]_0^1 \quad A = 22\text{FE}$$

$$\text{b) } f(x) = 0$$

lösen mit p-q ergibt $x_1 = 19$ und $x_2 = 3$

$$A = \int_3^{19} (-0,5x^2 + 11x - 28,5) dx \quad A = [300,8] - [-40,5]$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5,5x^2 - 28,5x \right]_3^{19} \quad A = 341,3\text{FE}$$

c) Hier wird wieder scheibchenweise die Fläche bestimmt.
Die erste Teilfläche ist nur von x-Achse und $t(x)$ begrenzt.

$$A_1 = \int_0^3 (x + 21,5) dx$$

$$A_1 = [0,5x^2 + 21,5x]_0^3$$

$$A_1 = [69] - [0]$$

$$A_1 = 69\text{FE}$$

Die zweite Teilfläche wird von beiden Funktionen begrenzt. => Schnittpunkte

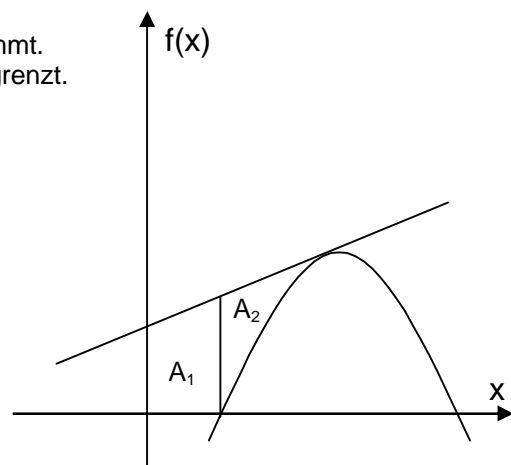
$$f(x) = t(x)$$

$$-0,5x^2 + 11x - 28,5 = x + 21,5$$

$$-0,5x^2 + 10x - 50 = 0 \quad \text{aufzuleitende Funktion}$$

lösen mit p-q ergibt $x_{1/2} = 10$

(doppelter Schnittpunkt da Tangente)



$$A_2 = \left| \int_3^{10} (-0,5x^2 + 10x - 50) dx \right|$$

$$A_2 = \left| \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x \right]_3^{10} \right|$$

$$A_2 = [-166,7] - [-109,5]$$

$$A_2 = | -57,2 |$$

$$A_2 = 57,2\text{FE}$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 = 69 + 57,2 = 126,2\text{FE}$$

Solche komplexeren Aufgaben kann man auch über eine Differenzrechnung lösen:

A_1 mit $t(x)$ von 0;10

A_2 mit $f(x)$ von 3;10

Und jetzt $A_{\text{ges}} = A_1 - A_2$ ergibt aber auch den gleichen Flächeninhalt ($265 - 138,8 = 126,2$)

Welchen Weg man wählt, muss jeder selbst entscheiden. Der Rechenaufwand ist gleich.