Lösungen R 14

Aufgabe 1

a) $p(x) = -7x + 49$ Der Höchstpreis beträgt 49 GE.

$p(x) = 0$

$0 = -7x + 49$

$x = 7$ $D_{ök} = [0;7]$

b) $E(x) = -7x^2 + 49x$ $E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$

Erlösmaximum $0 = -14x + 49$

$E'(x) = -14x + 49$ $x = 3{,}5$

$E''(x) = -14$ $E''(3{,}5) = -14 < 0 \Rightarrow$ Max. $E(3{,}5) = 85{,}75$

Das Erlösmaximum liegt bei 85,75 GE und wird mit 3,5 ME erreicht.

c) $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$k_v(x) = ax^2 + bx + c$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K_{fix} = 32$	I	$32 = d$	d einsetzen in II
$K(2) = 46$	II	$46 = 8a + 4b + 2c + d$	$\Rightarrow 14 = 8a + 4b + 2c$
$k_v(7) = 22$	III	$22 = 49a + 7b + c$	
$K'(7) = 78$	IV	$78 = 147a + 14b + c$	

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II} & 14 = 8a + 4b + 2c \\ \text{III} & 22 = 49a + 7b + c \quad |\cdot(-2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 14 = 8a + 4b + 2c \\ -44 = -98a - 14b - 2c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{II + III = V} \\ \text{V} \quad -30 = -90a - 10b \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III} & 22 = 49a + 7b + c \quad |\cdot(-1) \\ \text{IV} & 78 = 147a + 14b + c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -22 = -49a - 7b - c \\ 78 = 147a + 14b + c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{III + IV = VI} \\ \text{VI} \quad 56 = 98a + 7b \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V} & -30 = -90a - 10b \quad |\cdot 7 \\ \text{VI} & 56 = 98a + 7b \quad |\cdot 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -210 = -630a - 70b \\ 560 = 980a + 70b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{V + VI} \Rightarrow 350 = 350a \\ \Rightarrow 1 = a \end{array}$$

a in V $\Rightarrow -6 = b$; a und b in III $\Rightarrow 15 = c$; $\Rightarrow K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$

d) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -7x^2 + 49x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 32)$

$G(x) = -x^3 - x^2 + 34x - 32$

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 - x^2 + 34x - 32 \,|:(-1)$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 + 2x - 32$

$0 = x^3 + x^2 - 34x + 32$

p-q ergibt $x_2 = 4{,}7$ und $[x_3 = -6{,}7]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 1 ME und die Gewinngrenze bei 4,7 ME.

e) Die Gewinnzone ist 4,7 – 1 = 3,7 ME groß.

f) erlösmaximale Menge = x-Wert vom Erlösmaximum (Aufgabe 1b)

$x = 3{,}5$

$G(3{,}5) = 31{,}9$

Ja, der Gewinn liegt bei 31,9 GE.

g) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\qquad 0 = -3x^2 - 2x + 34 \,|\, :(-3)$

$G'(x) = -3x^2 - 2x + 34$ $\qquad 0 = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{34}{3}$

$G''(x) = -6x - 2$ $\qquad$ p-q liefert $x_1 = 3$ und $[x_2 = -3{,}7]$

$G''(3) = -20 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ $\qquad x_{G\max} = 3\text{ME}$

$C(x_{G\max} | p(x_{G\max}))$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$p(3) = 28$

$C(3|28)$ Bei 3 ME und einem Preis von 28 GE je Mengeneinheit macht man den maximalen Gewinn.

h) $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ $\qquad K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$ $\qquad K'(2) = 3$

$K'(x) = 3x^2 - 12x + 15$ $\qquad 0 = 6x - 12$ $\qquad GK_{min}(2|3)$

$K''(x) = 6x - 12$ $\qquad x = 2$

$K'''(x) = 6$ $\qquad K'''(2) = 6 < 0 \Rightarrow \text{Min.}$

Bei 2 ME liegt die geringste Kostensteigung von 3 GE vor.

i) BM und KPU berechnen

$k_v(x) = x^2 - 6x + 15$

$k_v'(x) = 2x - 6$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 6$

$x = 3$ $\qquad k''(3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $\qquad k_v(3) = 6$

Den kleinsten Preis von 6 GE kann der Betrieb bei einer Produktion von 3 ME anbieten.

j) BO und LPU berechnen

$k(x) = x^2 - 6x + 15 + \frac{32}{x}$

$k'(x) = 2x - 6 - \frac{32}{x^2}$ und $k''(x) = 2 + \frac{64}{x^3}$

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 6 - \frac{32}{x^2} \,|\, \cdot x^2$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 + x + 4$

$0 = 2x^3 - 6x^2 - 32 \,|\, :2$

$0 = x^3 - 3x^2 + 0x - 16$ $\qquad$ In der p-q-Formel ergibt sich eine negative Wurzel. Somit existieren keine weiteren Lösungen für x.

$k''(4) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $\qquad k(4) = 15$

Bei 4 ME (Betriebsoptimum BO) kann die LPU von 15 GE gehalten werden.

Aufgabe 2

a) $G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 9,5x^2 - 15x - 36 \,|\, :(-1)$

$0 = x^3 - 9,5x^2 + 15x + 36$

Polynomdivision mit $x_1 = 6$ ergibt $0 = x^2 - 3,5x - 6$

p-q ergibt $x_2 = 4,75$ und $[x_3 = -1,25]$

Die Gewinnschwelle liegt bei 4,75 ME und die Gewinngrenze bei 6 ME.

b) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G'(x) = -3x^2 + 19x - 15$

$G''(x) = -6x + 19$

$G''(5,4) = -13,4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G''(0,9) = 13,6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$0 = -3x^2 + 19x - 15 \,|\, :(-3)$

$0 = x^2 - \frac{19}{3}x + 5$

p-q liefert $x_1 = 5,4$ und $x_2 = 0,9$

$G(5,4) = 2,6$ Das Gewinnmaximum liegt bei 2,6 GE.

c) Bei 5,4 ME wird das Gewinnmaximum erreicht. Bei 10 ME ist es also weniger Gewinn; hier in diesem Fall sogar Verlust, da die Gewinngrenze bei 6 ME liegt und danach gibt es nur Verlust.

d) Anbieter i.v.K. = konstanter Preis

K(5)=88,5 GE (gegeben)
G(5)=1,5 GE (berechnet)

Da gilt: $E(x) = K(x) + G(x)$ ergibt sich:

$E(5) = 88,5 + 1,5$

$E(5) = 90$

Bei 5 ME erzielt man also einen Erlös von 90 GE.

Da gilt: $p(x) = E(x) : x$ ergibt sich:

$p(5) = 90 : 5$

$p(5) = 18$

Der Preis von 18 GE gilt aber bei jeder Stückzahl, da es ein Anbieter i.v.K. ist.
=> $p(x) = 18$ Der Preis liegt bei 18 GE.

e) $E(x) = p(x) \cdot x$

$E(x) = 18x$

$K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = 18x - (-x^3 + 9,5x^2 - 15x - 36)$

$K(x) = 18x + x^3 - 9,5x^2 + 15x + 36$

$K(x) = x^3 - 9,5x^2 + 33x + 36$

f) $k_v(x) = x^2 - 9,5x + 33$

$k_v'(x) = 2x - 9,5$ und $k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$0 = 2x - 9,5$

$x = 4,75$

$k''(4,75) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ $k_v(4,75) = 10,4$

Bei 4,75 ME (Betriebsminimum BM) liegt die KPU mit 10,4 GE.

Aufgabe 3

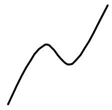
a)

$f(x) = x^3 - 5x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 5$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$ / $x \to +\infty; f(x) \to +\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|2)$ $f(x) = 0$

$0 = x^3 + 0x^2 - 5x + 2$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ führt zu

$0 = x^2 + 2x - 1$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 0{,}4$ und $x_3 = -2{,}4$

$S_{x1}(2|0)$ $S_{x2}(0{,}4|0)$ $S_{x3}(-2{,}4|0)$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$0 = 3x^2 - 5 \,|\, + 5$	$f''(1{,}3) = 7{,}8 > 0 \Rightarrow T$	
$5 = 3x^2 \,|\, :3$	$f''(-1{,}3) = -7{,}8 < 0 \Rightarrow H$	
$\frac{5}{3} = x^2 \,|\, \sqrt{}$	$f(1{,}3) = -2{,}3$	$T(1{,}3|-2{,}3)$
$x_1 = 1{,}3 \vee x_2 = -1{,}3$	$f(-1{,}3) = 6{,}3$	$H(-1{,}3|6{,}3)$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$0 = 6x$	$f'''(0) = 6 > 0 \Rightarrow R-L-K$	
$x = 0$	$f(0) = 2$	$W_{R-L}(0|2)$

$g(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}5$

$g'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2x$

$g''(x) = -0{,}6x + 1{,}2$

$g'''(x) = -0{,}6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$ / $x \to +\infty; f(x) \to -\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|-2{,}5)$ $g(x) = 0$

$0 = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}5 \,|\, :(-0{,}1)$

$0 = x^3 - 6x^2 + 0x + 25$ Polynomdivision mit $x_1 = 5$ führt zu

$0 = x^2 - x - 5$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 2{,}8$ und $x_3 = -1{,}8$

$S_{x1}(5|0)$ $S_{x2}(2{,}8|0)$ $S_{x3}(-1{,}8|0)$

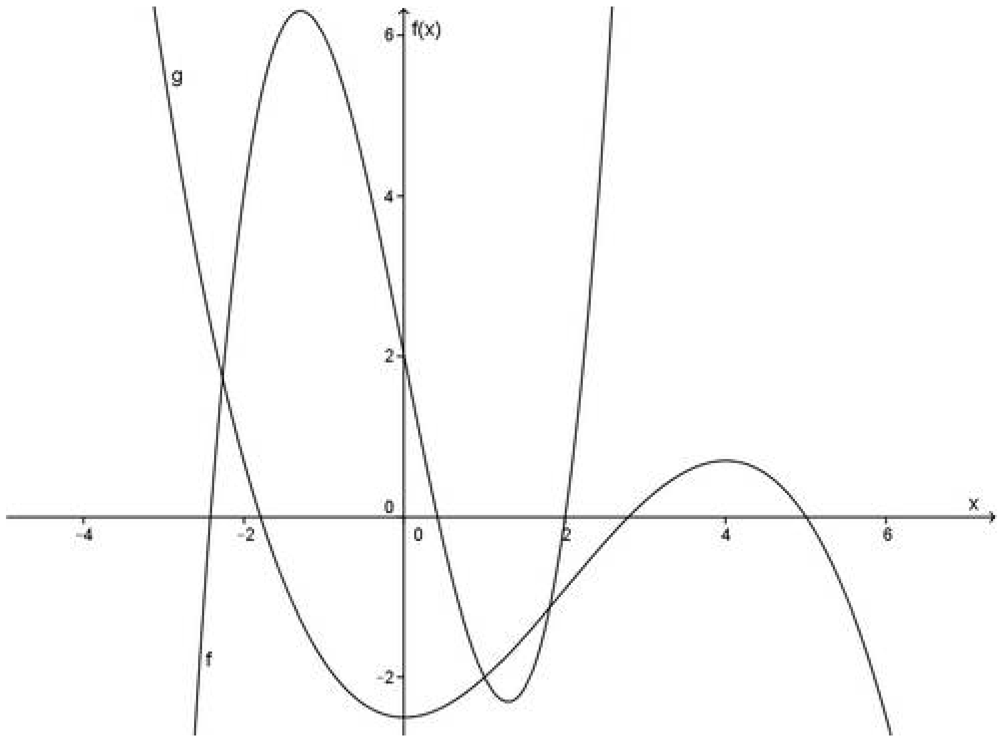
5. Extrempunkte $g'(x) = 0 \wedge g''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}3x^2 + 1{,}2x \,|\, :(-0{,}3)$	$g''(0) = 1{,}2 > 0 \Rightarrow T$	
$0 = x^2 - 4x$	$g''(4) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow H$	
$0 = x(x-4)$	$g(0) = -2{,}5$	$T(0|-2{,}5)$
$x_1 = 0 \vee x_2 = 4$	$g(4) = 0{,}7$	$H(4|0{,}7)$

6. Wendepunkte $g''(x) = 0 \wedge g'''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}6x + 1{,}2$	$g'''(2) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow L-R-K$	
$x = 2$	$f(2) = -0{,}9$	$W_{L-R}(2|-0{,}9)$

7. Zeichnung



b) $f(x) = g(x)$

$x^3 - 5x + 2 = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}5$ umformen

$0 = -1{,}1x^3 + 0{,}6x^2 + 5x - 4{,}5$ Nicht durch (-1,1) dividieren, da sonst Brüche entstehen.

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ führt zu

$0 = -1{,}1x^2 - 0{,}5x + 4{,}5 \,|\, : (-1{,}1)$ Jetzt muss man dividieren, sollte aber Brüche angeben.

$0 = x^2 + \frac{5}{11}x - \frac{45}{11}$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 1{,}8$ und $x_3 = -2{,}3$

$f(1) = -2$ $S_1(1|-2)$ Die Differenz zu den y-Werten aus der Funktion g(x)

$f(1{,}8) = -1{,}2$ $S_2(1{,}8|-1{,}2)$ ergibt sich durch das Runden der x-Werte.

$f(-2{,}3) = 1{,}3$ $S_3(-2{,}3|1{,}3)$ (exaktere Schnittpunkte: $S_2(1{,}81|-1{,}1)$ und $S_3(-2{,}26|1{,}7)$)

<u>Aufgabe 4</u>

Hier war eine falsche Funktion angegeben.

Richtig muss es lauten: $f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5$

1. HB $u = 2x + 2y$

2. NB $f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5$

3. $f(x) = 0$

$0 = -0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5 \,|\, : (-0{,}1)$

$0 = x^3 + 7x^2 - 5x - 75$ Polynomdivision mit $x_1 = 3$ führt zu

$0 = x^2 + 10x + 25$ p-q liefert $[x_{2/3} = -5]$ => $D = [0;3]$

(-5) entfällt, da das Rechteck rechts der y-Achse liegt.

4. $u(x) = 2x + 2(-0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5)$

$u(x) = -0{,}2x^3 - 1{,}4x^2 + 3x + 15$ **Zielfunktion**

5. $u'(x) = -0{,}6x^2 - 2{,}8x + 3$ $A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$u''(x) = -1{,}2x - 2{,}8$

$u'(x) = 0 \wedge u''(x) \neq 0$

$0 = -0{,}6x^2 - 2{,}8x + 3 \,|: (-0{,}6)$

$0 = x^2 + \frac{14}{3}x - 5$ p-q liefert $x_1 = 0{,}9$ und $[x_2 = -5{,}6]$

$u''(0{,}9) = -3{,}9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $f(0{,}9) = 7{,}3$ y-Wert

7. $u = 2 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 7{,}3$

$u = 16{,}4$ oder $u(0{,}9) = 16{,}4$

8. $u(0) = 15 < 16{,}4$

$A(3) = 6 < 16{,}4$

Das Rechteck hat eine Breite von 0,9 LE, eine Höhe von 7,3 LE und einen Umfang von 16,4 LE.