Lösungen Q 14

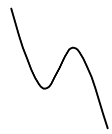
Aufgabe 1

a)

1. Definitionsbereich
2. Verlauf der Funktion
3. Symmetrie
4. S_x / S_y
5. Extrempunkte
6. Wendepunkte
7. Zeichnung

$$f(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$$
$$f'(x) = -3x^2 + 14x + 4$$
$$f''(x) = -6x + 14$$
$$f'''(x) = -6$$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty; f(x) \to -\infty$



3. KS **4.** $S_y(0|-10)$ $f(x) = 0$

$$0 = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10 \,|: (-1)$$

$0 = x^3 - 7x^2 - 4x + 10$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ führt zu

$0 = x^2 - 6x - 10$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 7{,}4$ und $x_3 = -1{,}4$

$S_{x1}(1|0)$ $S_{x2}(7{,}4|0)$ $S_{x3}(-1{,}4|0)$

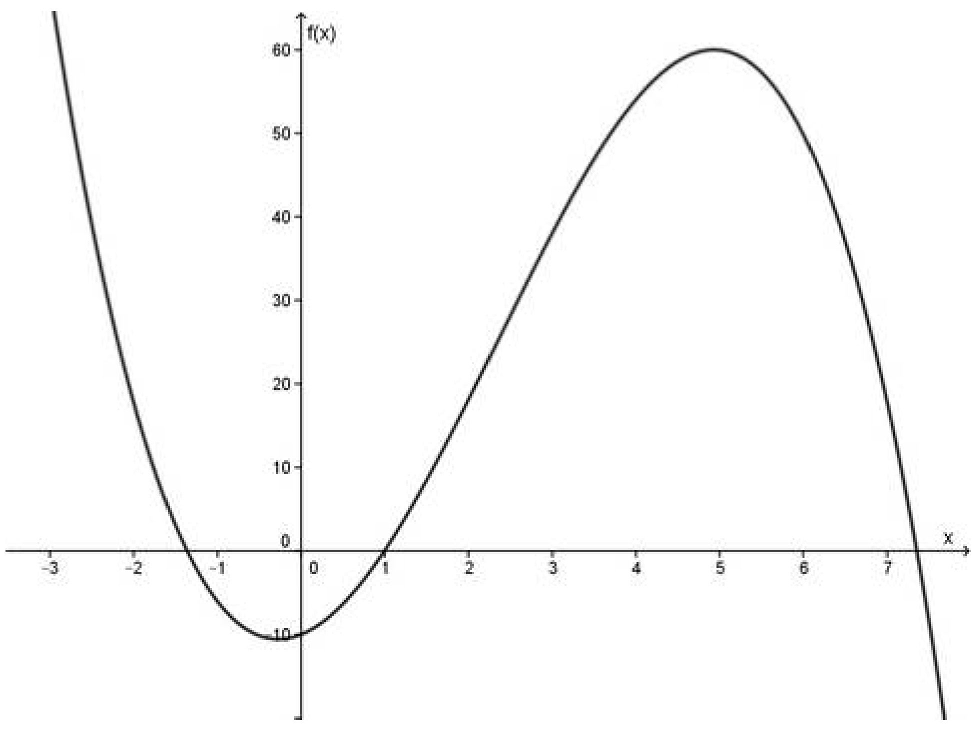
5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

$0 = -3x^2 + 14x + 4 \,|: (-3)$	$f''(4{,}9) = -15{,}4 < 0 \Rightarrow H$	
$0 = x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{4}{3}$	$f''(-0{,}3) = 15{,}8 > 0 \Rightarrow T$	
$x_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}$	$f(4{,}9) = 60$	$H(4{,}9|60)$
$x_1 = 4{,}9$ V $x_2 = -0{,}3$	$f(-0{,}3) = -10{,}5$	$T(-0{,}3|-10{,}5)$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = -6x + 14$	$f'''(2{,}3) = -6 < 0 \Rightarrow L-R-K$	
$x = 2{,}3$	$f(2{,}3) = 24{,}1$	$W_{L-R}(2{,}3|24{,}1)$

7. Zeichnung



b_1)
Die positiven Nullstellen der Funktion sind Gewinnschwelle und Gewinngrenze.
$x_1 = 1$ ME ist GS und $x_2 = 7{,}4$ ME ist GG
Die gewinnmaximale Menge liegt bei $x_{G\max} = 4{,}9$ ME und das Gewinnmaximum bei $G(4{,}9) = 60$ GE.
Die fixen Kosten sind S_y mit positivem Wert: $K_{fix} = 10$ GE.

b_2)
$G(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$ und $K(x) = x^3 - 8x^2 + 21x + 10$
$E(x) = G(x) + K(x)$
$E(x) = -x^2 + 25x$
$p(x) = -x + 25$ mit $p(x) = 0 \Rightarrow x = 25$ ME (SM) $\Rightarrow D_{ök} = [0;25]$

b_3)
$x_{G\max} = 4{,}9$ einsetzen in p(x)
$p(4{,}9) = 20{,}1 \quad \Rightarrow C(4{,}9|20{,}1)$

b_4)
gesucht: Betriebsminimum $\Rightarrow k_v'(x) = 0$ und Erlös
$k_v(x) = x^2 - 8x + 21$
$k_v'(x) = 2x - 8$
$k_v''(x) = 2$
$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$
$\Rightarrow x = 4$ mit $k_v''(4) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$ und einsetzen in E(x) ergibt
$E(4) = 84$ GE Stimmt.

b_5)
gesucht: erlösmaximale Menge $\Rightarrow E'(x) = 0$ und Stückkosten
$E'(x) = -2x + 25$
$E''(x) = -2$
$E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$
$\Rightarrow x = 12{,}5$ mit $E''(12{,}5) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$ und einsetzen in k(x)
$k(x) = x^2 - 8x + 21 + \frac{10}{x}$
$k(12{,}5) = 78{,}05$ GE Stimmt.

b_6)
$K'(x) = 3x^2 - 16x + 21$
$K'(5) = 16$ GE
Bei 5 ME liegt eine Kostensteigung von 16 GE vor, wenn die Produktionsmenge um eine unendlich kleine Einheit gesteigert wird.

c)
1. HB $D = f(x) - p(x)$ Differenz = Abstand zwischen zwei Funktionen
2. NB $f(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$ und $p(x) = -x + 25$

3. Der Definitionsbereich ist hier vorgegeben. Allerdings fehlt das Ende des Intervalls. Man muss also erst die Schnittpunkte von f(x) und p(x) berechnen.

$f(x) = p(x)$

$-x^3 + 7x^2 + 4x - 10 = -x + 25$ umstellen ergibt

$0 = x^3 - 7x^2 - 5x + 35$ Polynomdivision mit $x_1 = 7$ führt zu

$x^2 - 5 = 0$ umstellen, Wurzel ziehen ergibt

$x_2 = 2{,}2$ und $x_3 = -2{,}2$

Da $x_1 = 7$ der größte Schnittpunkt ist, lautet der Definitionsbereich $D = [0;7]$

4. $D(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10 - (-x + 25)$ f(x) liegt über p(x)

$D(x) = -x^3 + 7x^2 + 5x - 35$ **Zielfunktion**

5. $D'(x) = -3x^2 + 14x + 5$

$D''(x) = -6x + 14$ $\quad D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$

Mit p-q-Formel ergibt sich

$x_1 = 5$ und $[x_2 = -0{,}3]$

$D''(5) = -16 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $\begin{matrix} f(5) = 60 \\ p(5) = 20 \end{matrix}$ y-Werte **7.** $D(5) = 40$ **8.** $\begin{matrix} D(0) = -35 < 40 \\ D(7) = 0 < 40 \end{matrix}$

Der maximale Abstand zwischen f(x) und p(x) im Intervall $[0;7]$ beträgt 40 LE.

Aufgabe 2

$k_v'(x) = 2ax + b$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$k_v'(7{,}5) = 0$	I	$0 = 15a + b$
$K'(10) = 10{,}25$	II	$10{,}25 = 300a + 20b + c$
$K_{fix} = 2$	III	$2 = d$
$K_v(4) = 5{,}8$	IV	$5{,}8 = 64a + 16b + 4c$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II} & 10{,}25 = 300a + 20b + c \;\; |\cdot(-4) \\ \text{IV} & 5{,}8 = 64a + 16b + 4c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -41 = -1200a - 80b - 4c \\ 5{,}8 = 64a + 16b + 4c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{II + IV} \Rightarrow \text{V} \\ \text{V} \quad -35{,}2 = -1136a - 64b \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V} & -35{,}2 = -1136a - 64b \\ \text{I} & 0 = 15a + b \;\; |\cdot(64) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -35{,}2 = -1136a - 64b \\ 0 = 960a + 64b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{V + I} \Rightarrow -35{,}2 = -176a \\ \Rightarrow 0{,}2 = a \end{array}$$

a in I $\Rightarrow -3 = b$; a und b in II $\Rightarrow 10{,}25 = c$; $\Rightarrow K(x) = 0{,}2x^3 - 3x^2 + 10{,}25x + 2$

Aufgabe 3

a)

$E(x) = -3x^2 + 21x$

$p(x) = -3x + 21$

$p(x) = 0$

$x = 7 \quad SM = 7ME$

b)
$G(x) = E(x) - K(x)$ einsetzen und umformen ergibt
$G(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 5$
$G'(x) = -1{,}5x^2 + 3x + 6$
$G''(x) = -3x + 3$
$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$
Mit p-q-Formel ergibt sich
$x_1 = 3{,}2$ und $[x_2 = -1{,}2]$
$G''(3{,}2) = -6{,}6 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$
$G(3{,}2) = 13{,}2$ GE Stimmt.

c)
$K'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 15$
$K''(x) = 3x - 9$
$K'''(x) = 3$
$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$
$x = 3$
$K'''(3) = 3 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$
$K'(3) = 1{,}5 \qquad \Rightarrow GK_{min}(3|1{,}5)$

d)
$k_v(x) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 15$
$k_v'(x) = x - 4{,}5$
$k_v''(x) = 1$
$k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$
$x = 4{,}5$
$k_v''(4{,}5) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$
$k_v(4{,}5) = 4{,}9$
Die KPU liegt bei 4,9 GE.

<u>Aufgabe 4</u>
1. HB $V = a \cdot b \cdot c$ Da die HB 3 Variablen hat, braucht man 2 Nebenbedingungen.
2. NB $96 = 4a + 4b + 4c$ und $a = 3c$
Die zweite Nebenbedingung wird zur Vereinfachung in die erste Nebenbedingung und in die Hauptbedingung eingesetzt.
Damit erhält man neu:
1.a HB $V = 3c \cdot b \cdot c$ also $V = 3 \cdot b \cdot c^2$
2.a NB $96 = 4 \cdot 3c + 4b + 4c$ also zusammengefasst $96 = 16c + 4b$
Nun kann man in Punkt 3 die zusammengefasste Nebenbedingung nach der Variablen b auflösen.

$96 = 16c + 4b \mid -16c$	$b = 0$	
3. $96 - 16c = 4b \mid :4$	$0 = 24 - 4c$	=> $D = [0;6]$
$b = 24 - 4c$	$c = 6$	

4. $V(c) = 3 \cdot (24 - 4c) \cdot c^2$

$V(c) = -12c^3 + 72c^2$ **Zielfunktion**

5. $V'(c) = -36c^2 + 144c$ $\quad V'(c) = 0 \wedge V''(c) \neq 0$

$V''(c) = -72c + 144$

$0 = -36c^2 + 144c \,|: (-36)$

$0 = c^2 - 4c$ c ausklammern ergibt $c_1 = 0$ und $c_2 = 4$

$V''(0) = 144 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$V''(4) = -144 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $b = 24 - 4 \cdot 4$ Hier muss jetzt auch noch die Seite a berechnet werden. $a = 3 \cdot 4$

$b = 8$ $\quad a = 12$

Man setzt in die ursprüngliche Hauptbedingung ein.

7. $V = 12 \cdot 8 \cdot 4$ **8.** $V(0) = 0 < 384$

$V = 384$ $\quad V(6) = 0 < 384$

Der Quader hat eine Länge von a = 12 cm, eine Breite von b = 8 cm, eine Höhe von c = 4 cm und ein Volumen von 384 cm³.

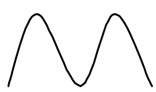
<u>Aufgabe 5</u>

$f(x) = -0{,}5x^4 + 4{,}5x^3 - 12x^2 + 8x$

$f'(x) = -2x^3 + 13{,}5x^2 - 24x + 8$

$f''(x) = -6x^2 + 27x - 24$

$f'''(x) = -12x + 27$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$ $\quad x \to +\infty; f(x) \to -\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|0)$ $\quad f(x) = 0$

$0 = -0{,}5x^4 + 4{,}5x^3 - 12x^2 + 8x \,|: (-0{,}5)$

$0 = x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 16x$ Ausklammern von x ergibt $x_1 = 0$ und

$0 = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ Polynomdivision mit $x_2 = 1$ führt zu

$0 = x^2 - 8x + 16$ p-q-Formel ergibt $x_{3/4} = 4$

$S_{x1}(0|0)$ $\quad S_{x2}(1|0)$ $\quad S_{x3/4}(4|0)$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$0 = -2x^3 + 13{,}5x^2 - 24x + 8$ Polynomdivision mit $x_1 = 4$ führt zu

$0 = -2x^2 + 5{,}5x - 2$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 2{,}3$ und $x_3 = 0{,}4$

$f''(4) = -12 < 0 \Rightarrow H$ $\quad f(4) = 0$ $\quad H(4|0)$

$f''(2{,}3) = 6{,}4 > 0 \Rightarrow T$ $\quad f(2{,}3) = -4{,}3$ $\quad T(2{,}3|-4{,}3)$

$f''(0{,}4) = -14{,}2 < 0 \Rightarrow H$ $\quad f(0{,}4) = 1{,}6$ $\quad H(0{,}4|1{,}6)$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) \neq 0$

$0 = -6x^2 + 27x - 24 \,|: (-6)$

$0 = x^2 - 4{,}5x + 4$ p-q-Formel ergibt $x_1 = 3{,}3$ und $x_2 = 1{,}2$

$f'''(3{,}3) = -12{,}6 < 0 \Rightarrow L - R - K$ $\quad f(3{,}3) = -1{,}9$ $\quad W_{L-R}(3{,}3|-1{,}9)$

$f'''(1{,}2) = 12{,}6 > 0 \Rightarrow R - L - K$ $\quad f(1{,}2) = -0{,}9$ $\quad W_{R-L}(1{,}2|-0{,}9)$3

7. Zeichnung