

Lösungen P 16

1. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = 0,5x^3 + 2x^2 + 0,5x - 3$

$$f(x) = 0$$

$$0 = 0,5x^3 + 2x^2 + 0,5x - 3 \quad | : 0,5$$

$$0 = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 + 5x + 6$

p-q ergibt $x_2 = -2$ und $x_3 = -3$

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} (0,5x^3 + 2x^2 + 0,5x - 3) dx$$

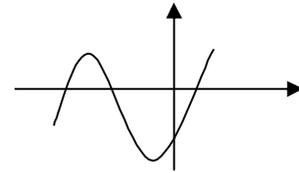
$$A_1 = \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x \right]_{-3}^{-2}$$

$$A_1 = \left[\frac{11}{3} \right] - \left[\frac{27}{8} \right]$$

$$A_1 = \frac{7}{24} \text{ FE}$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 = \frac{7}{24} + \frac{45}{8} = \frac{71}{12} \text{ FE} \approx 5,9 \text{ FE}$$

Skizze



$$A_2 = \left| \int_{-2}^1 (0,5x^3 + 2x^2 + 0,5x - 3) dx \right|$$

$$A_2 = \left| \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x \right]_{-2}^1 \right|$$

$$A_2 = \left| \left[-\frac{47}{24} \right] - \left[\frac{11}{3} \right] \right|$$

$$A_2 = \left| -\frac{45}{8} \right|$$

$$A_2 = \frac{45}{8} \text{ FE}$$

2. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = -2x^3 + 8x$

$$f(x) = 0$$

$$0 = -2x^3 + 8x \quad | : (-2)$$

$$0 = x^3 - 4x$$

ausklammern mit $x_1 = 0$

$$0 = x(x^2 - 4)$$

und Wurzel ziehen ergibt $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$

$$A_1 = \left| \int_{-2}^0 (-2x^3 + 8x) dx \right|$$

$$A_1 = \left| \left[-0,5x^4 + 4x^2 \right]_{-2}^0 \right|$$

$$A_1 = \left| [0] - [8] \right|$$

$$A_1 = \left| -8 \right|$$

$$A_1 = 8 \text{ FE}$$

$$A_2 = \int_0^2 (-2x^3 + 8x) dx$$

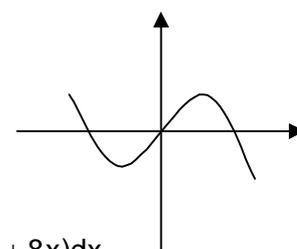
$$A_2 = \left[-0,5x^4 + 4x^2 \right]_0^2$$

$$A_2 = [8] - [0]$$

$$A_2 = 8 \text{ FE}$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 = 8 + 8 = 16 \text{ FE}$$

Skizze



Merke:

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, sind beide Flächen gleich groß. Man muss nur eine Fläche berechnen und kann dann ihren Wert verdoppeln. Günstigerweise berechnet man die Fläche mit der positiven Grenze, um Fehler beim Einsetzen von Minuswerten zu vermeiden (hier in der Rechnung A_2). Man schreibt dann am Ende: $A_{\text{ges}} = 2 \cdot A_2 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ FE}$

3. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x) = -0,5x^4 + 2,5x^2 - 2$

$$f(x) = 0$$

$$0 = -0,5x^4 + 2,5x^2 - 2 \quad | :(-0,5)$$

$$0 = x^4 - 5x^2 + 4$$

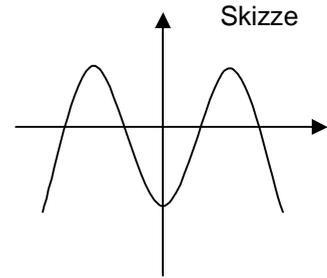
$$x^2 = z$$

$$0 = z^2 - 5z + 4 \quad \text{mit p-q ergibt sich } z_1 = 4 \quad \text{und} \quad z_2 = 1$$

$z = x^2$ und Wurzel ziehen ergibt

$$x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = -2 \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = -1$$

Da Achsensymmetrie zur y-Achse vorliegt, kann man nur die Seite mit den positiven Grenzen berechnen und dann verdoppeln.



$$A_1 = \left| \int_0^1 (-0,5x^4 + 2,5x^2 - 2) dx \right|$$

$$A_2 = \int_1^2 (-0,5x^4 + 2,5x^2 - 2) dx$$

$$A_1 = \left| \left[-0,1x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x \right]_0^1 \right|$$

$$A_2 = \left[-0,1x^5 + \frac{5}{6}x^3 - 2x \right]_1^2$$

$$A_1 = \left| \left[-\frac{19}{15} \right] - [0] \right|$$

$$A_2 = \left[-\frac{8}{15} \right] - \left[-\frac{19}{15} \right]$$

$$A_1 = \left| -\frac{19}{15} \right|$$

$$A_2 = \frac{11}{15} \text{ FE}$$

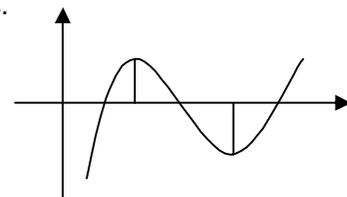
$$A_1 = \frac{19}{15} \text{ FE}$$

$$A_{\text{ges}} = 2 \cdot (A_1 + A_2) = 2 \cdot \left(\frac{19}{15} + \frac{11}{15} \right) = 4 \text{ FE}$$

4. Aufgabe

Hier muss man Hoch- und Tiefpunkt als Grenzen bestimmen, aber auch die Nullstellen sind wichtig. Liegt eine Nullstelle zwischen Hoch- und Tiefpunkt, wechselt die Fläche ihre Lage (oberhalb oder unterhalb der x-Achse) und somit ihr Vorzeichen. Berücksichtigt man diese Nullstelle nicht, so heben sich die Flächen gegenseitig auf und man erhält ein falsches Ergebnis.

Beispiel:



$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$f''(x) = 6x - 24$$

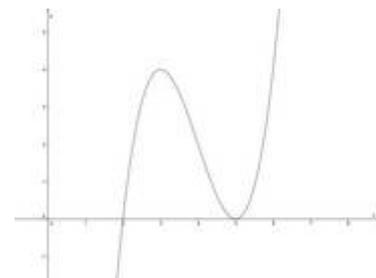
$$f'(x) = 0$$

Berechnung mit p-q ergibt $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f''(5) = 6 > 0 \Rightarrow \text{T} \quad f(5) = 0 \quad \text{T}(5|0)$$

$$f''(3) = -6 < 0 \Rightarrow \text{H} \quad f(3) = 4 \quad \text{H}(3|4)$$



Die Fläche liegt nur auf einer Seite der x-Achse. Es ist keine Nullstellenberechnung nötig.

$$A = \int_3^5 (x^3 - 12x^2 + 45x - 50) dx$$

$$A = [-31,25] - [-35,25]$$

$$A = [0,25x^4 - 4x^3 + 22,5x^2 - 50x]_3^5$$

$$A = 4FE$$

5. Aufgabe

Für die Fläche mit der x-Achse benötigt man die Nullstellen.

$$f(x) = 0$$

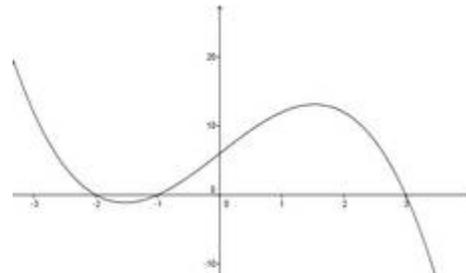
$$0 = -x^3 + 7x + 6 \quad | :(-1)$$

$$0 = x^3 - 7x - 6$$

$$\text{Polynomdivision mit } x_1 = -1 \text{ ergibt } 0 = x^2 - x - 6$$

$$p-q \text{ ergibt } x_2 = -2 \text{ und } x_3 = 3$$

Skizze



a) Fläche im I. Quadranten $[0;3]$

$$A = \int_0^3 (-x^3 + 7x + 6) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 6x \right]_0^3$$

$$A = [29,25] - [0]$$

$$A = 29,25FE$$

b) Fläche im II. Quadranten $[-1;0]$

$$A = \int_{-1}^0 (-x^3 + 7x + 6) dx$$

$$A = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + 6x \right]_{-1}^0$$

$$A = [0] - [-2,75]$$

$$A = 2,75FE$$

6. Aufgabe

Schneiden sich zwei Funktionen, muss man zur Berechnung der eingeschlossenen Fläche die Schnittpunkte der beiden Funktionen bestimmen.

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$0,25(x-4)^2 - 4 = -0,25x^2 + 2x$$

$$0,25(x^2 - 8x + 16) - 4 = -0,25x^2 + 2x$$

$$0,25x^2 - 2x + 4 - 4 = -0,25x^2 + 2x$$

$$0,25x^2 - 2x = -0,25x^2 + 2x$$

$$0 = -0,5x^2 + 4x$$

$$\text{Ausklammern von } x \text{ ergibt: } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 8$$

Hier muss bei der einen Funktion erst die binomische Formel ausgerechnet und dann noch zusammengefasst werden.

Diese Umformung kann man auch vor dem Gleichsetzen durchführen.

Für die Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen wird die zusammengesetzte Funktion (obere Funktion minus untere Funktion) aufgeleitet.

$$A = \int_0^8 (-0,5x^2 + 4x) dx$$

$$A = \left[\frac{128}{3} \right] - [0]$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 \right]_0^8$$

$$A = \frac{128}{3} FE \approx 42,7FE$$