Lösungen P 15

<u>Aufgabe 1</u>

a)

$G(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$ und $K(x) = x^3 - 8x^2 + 21x + 10$

$E(x) = G(x) + K(x)$

$E(x) = -x^2 + 25x$

$p(x) = -x + 25$ mit $p(x) = 0 \Rightarrow x = 25$ ME (SM) $\Rightarrow D_{ök} = [0;25]$

b)

$G(x) = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10$

$G'(x) = -3x^2 + 14x + 4$

$G''(x) = -6x + 14$

$G'(x) = 0$ $\qquad$ $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$0 = -3x^2 + 14x + 4 \,|\, : (-3)$ $\qquad$ $f''(4,9) = -15,4 < 0 \Rightarrow$ Max.

$0 = x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{4}{3}$ $\qquad$ $p(4,9) = 20,1 \quad \Rightarrow C(4,9|20,1)$

$x_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}$ $\qquad$ Bei 4,9 ME und einem Preis von 20,1 GE pro ME

$x_1 = 4,9 \vee x_2 = -0,3 \notin D_{ök}$ $\qquad$ erzielt man maximalen Gewinn.

c)

$G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 7x^2 + 4x - 10 \,|\, : (-1)$

$0 = x^3 - 7x^2 - 4x + 10$ $\qquad$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ führt zu

$0 = x^2 - 6x - 10$ $\qquad$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 7,4$ und $x_3 = -1,4 \notin D_{ök}$

Die Gewinngrenze liegt bei 7,4 ME.

d) gesucht: Betriebsminimum $\Rightarrow k_v'(x) = 0$ und Erlös

$k_v(x) = x^2 - 8x + 21$

$k_v'(x) = 2x - 8$

$k_v''(x) = 2$

$k_v'(x) = 0$ $\qquad$ $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$

$\Rightarrow x = 4$ $\qquad$ $k_v''(4) = 2 > 0 \Rightarrow$ Min.

einsetzen in E(x) ergibt $E(4) = 84$ GE $\quad$ Stimmt.

e)

gesucht: erlösmaximale Menge $\Rightarrow E'(x) = 0$ und Stückkosten

$E'(x) = -2x + 25$

$E''(x) = -2$

$E'(x) = 0$ $\qquad$ $E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$

$\Rightarrow x = 12,5$ $\qquad$ $E''(12,5) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max.

einsetzen in k(x) mit $k(x) = x^2 - 8x + 21 + \frac{10}{x}$

$k(12{,}5) = 78{,}05$ GE   Stimmt.

f)

$K'(x) = 3x^2 - 16x + 21$

$K'(5) = 16$ GE

Bei 5 ME liegt eine Kostensteigung von 16 GE vor, wenn die Produktionsmenge um eine unendlich kleine Einheit gesteigert wird.

Aufgabe 2

a)

$E(x) = -3x^2 + 21x$

$p(x) = -3x + 21$

$p(x) = 0$

$x = 7 \quad SM = 7ME$

b)

$G(x) = E(x) - K(x)$ einsetzen und umformen ergibt

$G(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 5$

$G'(x) = -1{,}5x^2 + 3x + 6$

$G''(x) = -3x + 3$

$G'(x) = 0$

mit p-q-Formel ergibt sich $x_1 = 3{,}2$ und $x_2 = -1{,}2 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(3{,}2) = -6{,}6 < 0 \Rightarrow$ Max.

$G(3{,}2) = 13{,}2$ GE Stimmt.

c)

$K'(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 15$

$K''(x) = 3x - 9$

$K'''(x) = 3$

$K''(x) = 0$

$x = 3$

$K''(x) = 0 \wedge K'''(x) \neq 0$

$K'''(3) = 3 > 0 \Rightarrow$ Min.

$K'(3) = 1{,}5 \qquad \Rightarrow GK_{min}(3|1{,}5)$

Bei 3 ME liegt die geringste Kostensteigung von 1,5 GE vor.

d)

$k_v(x) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 15$

$k_v'(x) = x - 4{,}5$

$k_v''(x) = 1$

$k'(x) = 0$

$x = 4{,}5$

$k'(x) = 0 \wedge k''(x) \neq 0$

$k_v''(4{,}5) = 1 > 0 \Rightarrow$ Min.

$k_v(4{,}5) = 4{,}9$

Die KPU liegt bei 4,9 GE.

<u>Aufgabe 3</u>

a) $E(x) = K(x) + G(x)$

$E(x) = 5x^3 - 6x^2 + 45x + 17 - 5x^3 + x^2 - 30x - 17$

$E(x) = -5x^2 + 15x$

$E(x) = p(x) : x$

$p(x) = -5x + 15$

Monopolist

b) $E(x) = p(x) \cdot x$

$E(x) = -12x^2 + 36x$

$K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = -12x^2 + 36x - (-0{,}5x^3 + 2x^2 - 12x - 25)$

$K(x) = 0{,}5x^3 - 14x^2 + 48x + 25$

c) $K(x) = k(x) \cdot x$

$K(x) = x^3 - 5x^2 + 16x + 31$

$E(x) = K(x) + G(x)$

$E(x) = x^3 - 5x^2 + 16x + 31 - x^3 + 5x^2 - 7x - 31$

$E(x) = 9x$

$E(x) = p(x) : x$

$p(x) = 9$

Anbieter i.v.K.

<u>Aufgabe 4</u>

a)

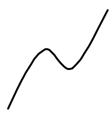
$f(x) = x^3 - 5x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 5$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$



3. KS **4.** $S_y(0|2)$ $f(x) = 0$

$0 = x^3 + 0x^2 - 5x + 2$ Polynomdivision mit $x_1 = 2$ führt zu

$0 = x^2 + 2x - 1$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 0{,}4$ und $x_3 = -2{,}4$

$S_{x1}(2|0)$ $S_{x2}(0{,}4|0)$ $S_{x3}(-2{,}4|0)$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0$

$0 = 3x^2 - 5 \,|+5$

$5 = 3x^2 \,|:3$

$\frac{5}{3} = x^2 \,|\sqrt{\ }$

$x_1 = 1{,}3$ V $x_2 = -1{,}3$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(1{,}3) = 7{,}8 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-1{,}3) = -7{,}8 < 0 \Rightarrow H$

$f(1{,}3) = -2{,}3$ $T(1{,}3|-2{,}3)$

$f(-1{,}3) = 6{,}3$ $H(-1{,}3|6{,}3)$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0$

$0 = 6x$

$x = 0$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(0) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$

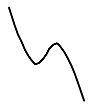
$f(0) = 2$ $W_{R-L}(0|2)$

$g(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}5$

$g'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2x$

$g''(x) = -0{,}6x + 1{,}2$

$g'''(x) = -0{,}6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|-2{,}5)$ $g(x) = 0$

$0 = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}5 \,|: (-0{,}1)$

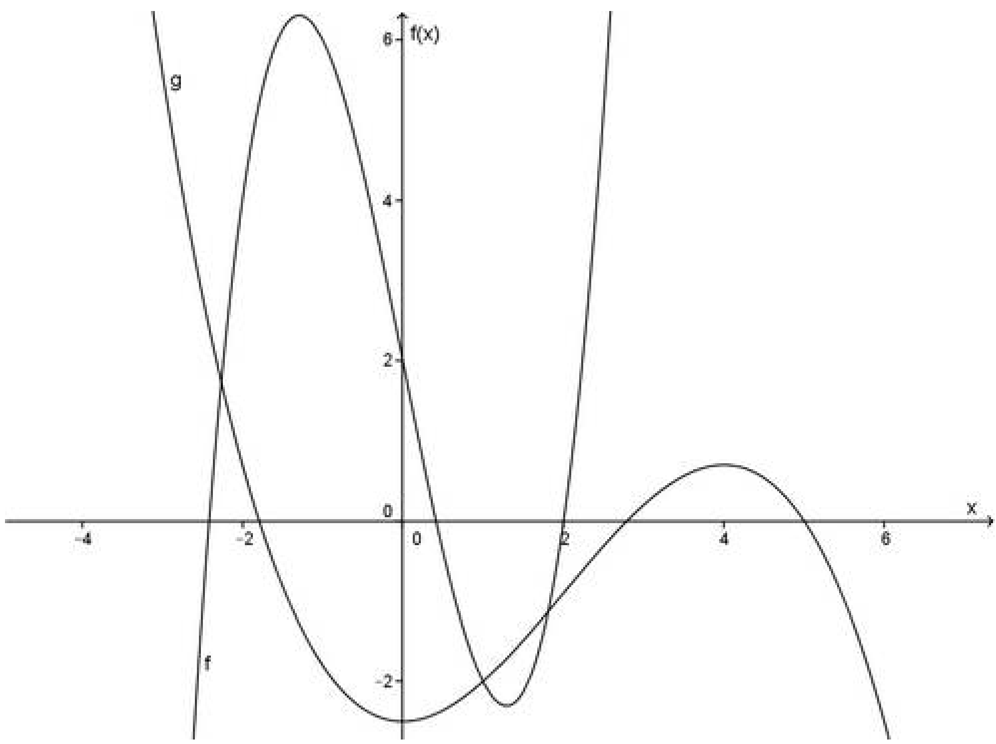
$0 = x^3 - 6x^2 + 0x + 25$ Polynomdivision mit $x_1 = 5$ führt zu

$0 = x^2 - x - 5$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 2{,}8$ und $x_3 = -1{,}8$

$S_{x1}(5|0)$ $S_{x2}(2{,}8|0)$ $S_{x3}(-1{,}8|0)$

5. Extrempunkte $g'(x) = 0$	$g'(x) = 0 \ \wedge \ g''(x) \neq 0$	
$0 = -0{,}3x^2 + 1{,}2x \,|: (-0{,}3)$	$g''(0) = 1{,}2 > 0 \Rightarrow T$	
$0 = x^2 - 4x$	$g''(4) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow H$	
$0 = x(x-4)$	$g(0) = -2{,}5$	$T(0|-2{,}5)$
$x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 4$	$g(4) = 0{,}7$	$H(4|0{,}7)$
6. Wendepunkte $g''(x) = 0$	$g''(x) = 0 \ \wedge \ g'''(x) \neq 0$	
$0 = -0{,}6x + 1{,}2$	$g'''(2) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow L-R-K$	
$x = 2$	$f(2) = -0{,}9$	$W_{L-R}(2|-0{,}9)$

7. Zeichnung



b) $f(x) = g(x)$

$x^3 - 5x + 2 = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 2{,}5$ umformen

$0 = -1{,}1x^3 + 0{,}6x^2 + 5x - 4{,}5$ Nicht durch (-1,1) dividieren, da sonst Brüche entstehen.

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ führt zu

$0 = -1{,}1x^2 - 0{,}5x + 4{,}5 \,|: (-1{,}1)$ Jetzt muss man dividieren, sollte aber Brüche angeben.

$0 = x^2 + \frac{5}{11}x - \frac{45}{11}$ p-q-Formel ergibt $x_2 = 1{,}8$ und $x_3 = -2{,}3$

$f(1) = -2$ $S_1(1|-2)$ Die Differenz zu den y-Werten aus der Funktion g(x)

$f(1{,}8) = -1{,}2$ $S_2(1{,}8|-1{,}2)$ ergibt sich durch das Runden der x-Werte.

$f(-2{,}3) = 1{,}3$ $S_3(-2{,}3|1{,}3)$ (exaktere Schnittpunkte: $S_2(1{,}81|-1{,}1)$ und $S_3(-2{,}26|1{,}7)$)

Aufgabe 5

1. HB $u = 2x + 2y$

2. NB $f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5$

3. $f(x) = 0$

$0 = -0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5 \,|: (-0{,}1)$

$0 = x^3 + 7x^2 - 5x - 75$ Polynomdivision mit $x_1 = 3$ führt zu

$0 = x^2 + 10x + 25$ p-q liefert $x_{2/3} = -5 \notin D_{ök}$ => $D = [0;3]$

(-5) entfällt, da das Rechteck rechts der y-Achse liegt.

4. $u(x) = 2x + 2(-0{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}5x + 7{,}5)$

$u(x) = -0{,}2x^3 - 1{,}4x^2 + 3x + 15$ **Zielfunktion**

5. $u'(x) = -0{,}6x^2 - 2{,}8x + 3$

$u''(x) = -1{,}2x - 2{,}8$

$u'(x) = 0$

$0 = -0{,}6x^2 - 2{,}8x + 3 \,|: (-0{,}6)$

$0 = x^2 + \frac{14}{3}x - 5$ p-q liefert $x_1 = 0{,}9$ und $x_2 = -5{,}6 \notin D_{ök}$

$u'(x) = 0 \wedge u''(x) \neq 0$

$u''(0{,}9) = -3{,}9 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $f(0{,}9) = 7{,}3$ y-Wert

7. $u = 2 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 7{,}3$
$u = 16{,}4$ oder $u(0{,}9) = 16{,}4$

8. $u(0) = 15 < 16{,}4$
$A(3) = 6 < 16{,}4$

Das Rechteck hat eine Breite von 0,9 LE, eine Höhe von 7,3 LE und einen Umfang von 16,4 LE.

Aufgabe 6

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$P(-1|0)$	$f(-1) = 0$	I	$0 = -a + b - c + d$
$P(-2|3)$	$f(-2) = 3$	II	$3 = -8a + 4b - 2c + d$
$x = -2; m = -2{,}5$	$f'(-2) = -2{,}5$	III	$-2{,}5 = 12a - 4b + c$
$P(0|-2)$	$f(0) = -2$	IV	$-2 = d$

Die Variable d einsetzen in I und II sowie umformen ergibt:

I $2=-a+b-c$
II $5=-8a+4b-2c$
III $-2{,}5=12a-4b+c$

Lösen des LGS mit TR Modus 5 EQN Nr. 2
ergibt: $a=0{,}5$, $b=2$, $c=-0{,}5$
$f(x)=0{,}5x^3+2x^2-0{,}5x-2$

<u>Aufgabe 7</u>
Gesucht: maximaler Flächeninhalt des gesamten rechteckigen Spielplatzes

1. $A=2x\cdot y$ Hauptbedingung

2. $50=4x+3y$ Nebenbedingung

3. $y=\frac{50}{3}-\frac{4}{3}x$ Nebenbedingung umstellen

$y=0$

$0=\frac{50}{3}-\frac{4}{3}x$ $D=[0;12{,}5]$ (für die Variable x, siehe Zielfunktion)

$x=12{,}5$

4. $A(x)=2x\cdot(\frac{50}{3}-\frac{4}{3}x)$

$A(x)=-\frac{8}{3}x^2+\frac{100}{3}x$ Zielfunktion

5. $A'(x)=-\frac{16}{3}x+\frac{100}{3}$

$A''(x)=-\frac{16}{3}$

$A'(x)=0$

$0=-\frac{16}{3}x+\frac{100}{3}$

$x=6{,}25$

$A'(x)=0\wedge A''(x)\neq 0$

$A''(6{,}25)=-\frac{16}{3}<0\Rightarrow \text{Max.}$

6. $y=\frac{50}{3}-\frac{4}{3}\cdot 6{,}25$

$y=8{,}3$

7. $A=2\cdot 6{,}25\cdot 8{,}3$

$A=103{,}75$

8. $A(0)=0<103{,}75$

$A(12{,}5)=0<103{,}75$

Die Spielplatzbereiche haben jeweils eine Länge von 6,25 m, eine Breite von 8,3 m und eine Gesamtfläche von 103,75 m².

<u>Aufgabe 8</u>

1. $D=g(x)-f(x)$ Hauptbedingung

2. $g(x)=x^2-2x-1$ Nebenbedingungen

$f(x)=x^3-5x^2+5x-4$

3. $D=[0;2]$ Definitionsbereich

4. $D(x) = x^2 - 2x - 1 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 4)$ Klammer auflösen und zusammenfassen

$D(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 3$ Zielfunktion

5. $D'(x) = -3x^2 + 12x - 7$

$D''(x) = -6x + 12$

$D'(x) = 0$

$0 = -3x^2 + 12x - 7 \,|\, : (-3)$

$0 = x^2 - 4x + \frac{7}{3}$ pq ergibt $x_1 = 3{,}3 \notin D$ und $x_2 = 0{,}7$

$D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$

$D''(0{,}7) = 7{,}8 > 0 \Rightarrow$ Min.

6. $g(0{,}7) = -1{,}9$

$f(0{,}7) = -2{,}6$

7. $D = -1{,}9 - (-2{,}6)$

$D = 0{,}7$

8. $D(0) = 3 > 0{,}7$

$D(2) = 5 > 0{,}7$

Der minimalste Abstand im angegebenen Intervall beträgt 0,7 LE.

<u>Aufgabe 9</u>

a)

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$T(-2 \mid -5)$	$f(-2) = -5$	I	$-5 = 16a - 8b + 4c - 2d + e$
$x = -2$; $m = 0$	$f'(-2) = 0$	II	$0 = -32a + 12b - 4c + d$
$S_x(1 \mid 0)$	$f(1) = 0$	III	$0 = a + b + c + d + e$
$x = 1$; $m = 1{,}5$	$f'(1) = 1{,}5$	IV	$1{,}5 = 4a + 3b + 2c + d$
$x = 0$; $K = 0$	$f''(0) = 0$	V	$0 = 2c \quad \Rightarrow c = 0$

b)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$x = 5$; $m = -1$	$f'(5) = -1$	I	$-1 = 75a + 10b + c$
$H(1 \mid 4)$	$f(1) = 4$	II	$4 = a + b + c + d$
$x = 1$; $m = 0$	$f'(1) = 0$	III	$0 = 3a + 2b + c$
$x = 4$; $K = 0$	$f''(4) = 0$	IV	$0 = 24a + 2b$

Aufgabe 10

a) $E(x) = ax^2 + 144x$ und $P(6|432)$ einsetzen

$432 = a \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 \quad \Rightarrow a = -12$ und somit $E(x) = -12x^2 + 144x$

b) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -12x^2 + 144x - (x^3 - 10x^2 + 56x + 100)$

$G(x) = -x^3 - 2x^2 + 88x - 100$

$G'(x) = -3x^2 - 4x + 88$

$G''(x) = -6x - 4$

$G'(x) = 0$

mit p-q-Formel ergibt sich $x_1 = 4{,}8$ und $x_2 = -6{,}1 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(4{,}8) = -32{,}8 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(4{,}8) = 165{,}7\text{GE}$

Das Gewinnmaximum liegt bei 165,7 GE.

c) $p(x) = -12x + 144$

$p(4{,}8) = 86{,}4\text{GE}$

Der Cournot'sche Punkt liegt bei $C(4{,}8|86{,}4)$. Man muss 86,4 GE pro ME verlangen.

d) $E(x) = 60x$

$K(x) = x^3 - 10x^2 + 56x + 50$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 60x - (x^3 - 10x^2 + 56x + 50)$

$G(x) = -x^3 + 10x^2 + 4x - 50$

$G'(x) = -3x^2 + 20x + 4$

$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$

mit p-q-Formel ergibt sich $x_1 = 6{,}9$ und $x_2 = -0{,}2 \notin D_{ök}$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(6{,}9) = -21{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$G(6{,}9) = 125{,}2\text{GE}$

Der maximale Gewinn kann nicht gehalten werden, er liegt nur noch bei 125,2 GE.

Aufgabe 11

$p(x) = 5$

$E(x) = 5x$

Über den Gewinn wird folgendes ausgesagt: $P_1(2|0)$ und $P_2(3|2{,}5)$ $K_{fix} = 8$

$G(x) = ax^2 + bx + c$ Die Konstante beträgt $c = -8$, da fixe Kosten vom Gewinn abgezogen werden müssen.

$G(x) = ax^2 + bx - 8$ Setzt man die beiden Punkte ein, erhält man folgendes Gleichungssystem

I $0 = 4a + 2b - 8$ Stellt man die Gleichungen um und löst, so erhält man

II $2{,}5 = 9a + 3b - 8$ $a = -0{,}5$ und $b = 5$ $\Rightarrow G(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 8$

Aus $G(x) = E(x) - K(x)$ bzw. $K(x) = E(x) - G(x)$ erhält man die Kostenfunktion mit

$K(x) = 0{,}5x^2 + 8$