Lösungen N 18

1. Aufgabe

$f_a(x) = 0{,}5(x^2 - ax + 4)$ mit $a \geq 0$

$f_a(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5ax + 2$

a) $f_5(x) = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 2$

$S_y(0|2)$

$f_5(x_N) = 0$

$0 = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 2 \,|\!: 0{,}5$

$0 = x^2 - 5x + 4$ lösen mit p-q-Formel ergibt

$x_{N1} = 4$ und $x_{N2} = 1$

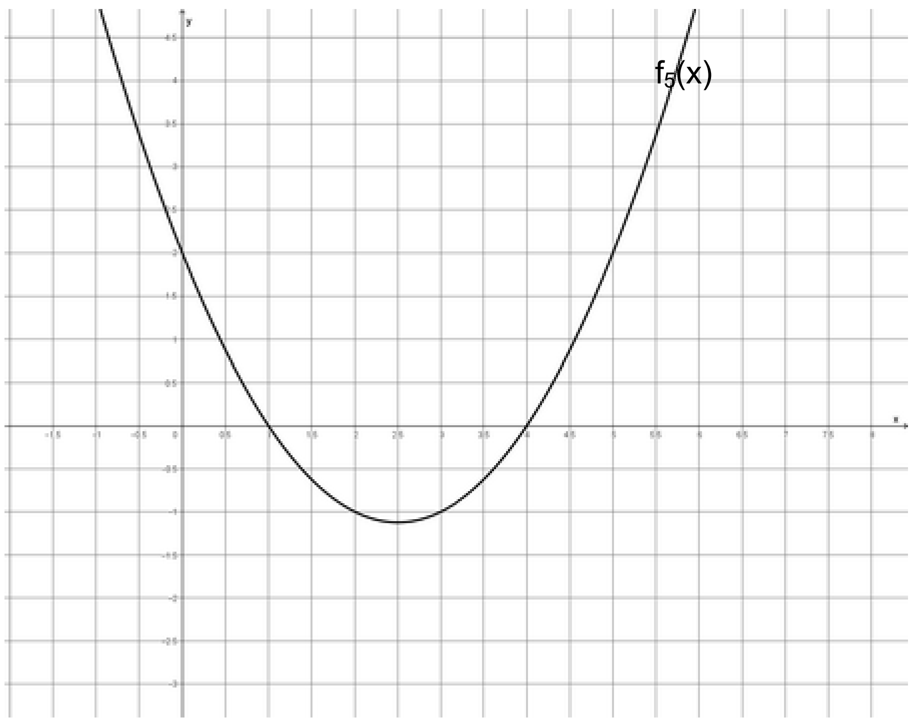
$S_{x1}(4|0) \quad S_{x2}(1|0)$

$f_5'(x) = x - 2{,}5$

$f_5''(x) = 1$

$f_5'(x_E) = 0$	$f_5'(x_E) = 0 \wedge f_5''(x_E) \neq 0$	$f_5(2{,}5) = -1{,}125$
$0 = x - 2{,}5$	$f_5''(2{,}5) = 1 > 0 \Rightarrow T$	$T(2{,}5|-1{,}13)$
$x_E = 2{,}5$		

b)



c)

$t(x) = m \cdot x + b$	$0 = 1{,}5 \cdot 4 + b$	$t(x) = m \cdot x + b$	$0 = -1{,}5 \cdot 1 + b$
$S_{x1}(4|0)$	$b = -6$	$S_{x2}(1|0)$	$b = 1{,}5$
$f_5'(4) = 1{,}5$	$t(x_1) = 1{,}5x - 6$	$f_5'(1) = -1{,}5$	$t(x_2) = -1{,}5x + 1{,}5$

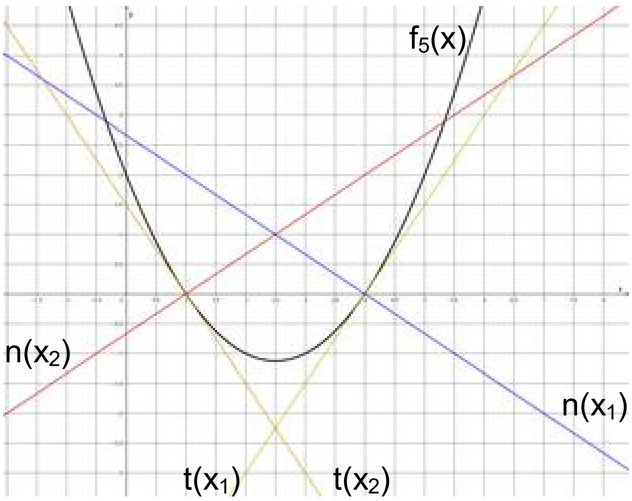
d) $t(x_1) = t(x_2)$

$1{,}5x - 6 = -1{,}5x + 1{,}5 \,|+1{,}5x + 6$

$3x = 7{,}5 \,|:2$ $\qquad t(2{,}5) = -2{,}25$

$x = 2{,}5$ $\qquad S(2{,}5|-2{,}25)$

Skizze nur zur Verdeutlichung



e) $m_1 \cdot m_2 = -1$

$n(x_1) = m \cdot x + b$	$n(x_2) = m \cdot x + b$
$m_1 = \frac{3}{2}$	$m_1 = -\frac{3}{2}$
$m_2 = -\frac{2}{3}$	$m_2 = +\frac{2}{3}$
$S_{x1}(4|0)$	$S_{x2}(1|0)$
$0 = -\frac{2}{3} \cdot 4 + b$	$0 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b$
$b = \frac{8}{3}$	$b = -\frac{2}{3}$
$n(x_1) = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$	$n(x_2) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

f) Da nur die höchste Potenz für den Verlauf betrachtet wird, ist dieser unabhängig von a.

$x \to -\infty; f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

Bei der Symmetrie muss man alle Potenzen betrachten. Hier wird eine Fallunterscheidung notwendig.

a>0 Das lineare x (also x^1) ist vorhanden, somit liegt keine Symmetrie vor, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

a=0 Das lineare x ist nicht mehr vorhanden, somit liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor, da nur gerade Exponenten vorhanden sind.

g) $f_a(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5ax + 2$ $\qquad f_a'(x_E) = 0$ $\qquad f_a'(x_E) = 0 \wedge f_a''(x_E) \neq 0$

$f_a'(x) = x - 0{,}5a$ $\qquad 0 = x - 0{,}5a$ $\qquad f_a''(0{,}5) = 1 > 0 \Rightarrow T$

$f_a''(x) = 1$ $\qquad x_E = 0{,}5a$

Die Vorgabe $a \geq 0$ lässt nur Extrempunkte auf der y-Achse (für a=0) und im positiven Bereich der x-Achse zu (a>0).

Der Parameter a beeinflusst nicht die Art des Extrempunktes. Es ist immer ein Tiefpunkt.

Ein Berechnen des y-Wertes ist nicht nötig, da nur die Extrem<u>stelle</u> gesucht ist.

Zusatzangabe: $f_a(0{,}5a) = 0{,}5(0{,}5a)^2 - 0{,}5a(0{,}5a) + 2$

$f_a(0{,}5a) = 0{,}5(0{,}25a^2) - 0{,}25a^2 + 2$

$f_a(0{,}5a) = 0{,}125a^2 - 0{,}25a^2 + 2$

$f_a(0{,}5a) = -0{,}125a^2 + 2$ $\qquad T(0{,}5a|-0{,}125a^2 + 2)$

h) Der Schnittpunkt der beiden Tangenten liegt auf der Spiegelachse der Parabel.

Spiegelachse = Senkrechte durch den Scheitel (siehe Zeichnung)

Das Gleiche gilt auch für den Schnittpunkt der Normalen.

2. Aufgabe

$$f_t(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 - \frac{3}{2}tx \text{ mit } t \in R$$

a) $f_{-3}(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

$f_{-3}(x_N) = 0$

$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \,\Big|\, : \frac{1}{8}$

$0 = x^3 - 12x^2 + 36x$ $\qquad$ $0 = x^2 - 12x + 36$

$0 = x(x^2 - 12x + 36)$ $\qquad$ $x_{N2/3} = +6 \pm \sqrt{6^2 - 36}$

$x_{N1} = 0$ $\qquad$ $S_{x1}(0|0)$ $\qquad$ $x_{N2/3} = +6$ $\qquad$ $S_{x2/3}(6|0)$

$f_{-3}'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$

$f_{-3}''(x) = \frac{3}{4}x - 3$

$f_{-3}'(x_E) = 0$ $\qquad$ $f_{-3}'(x_E) = 0 \wedge f_{-3}''(x_E) \neq 0$

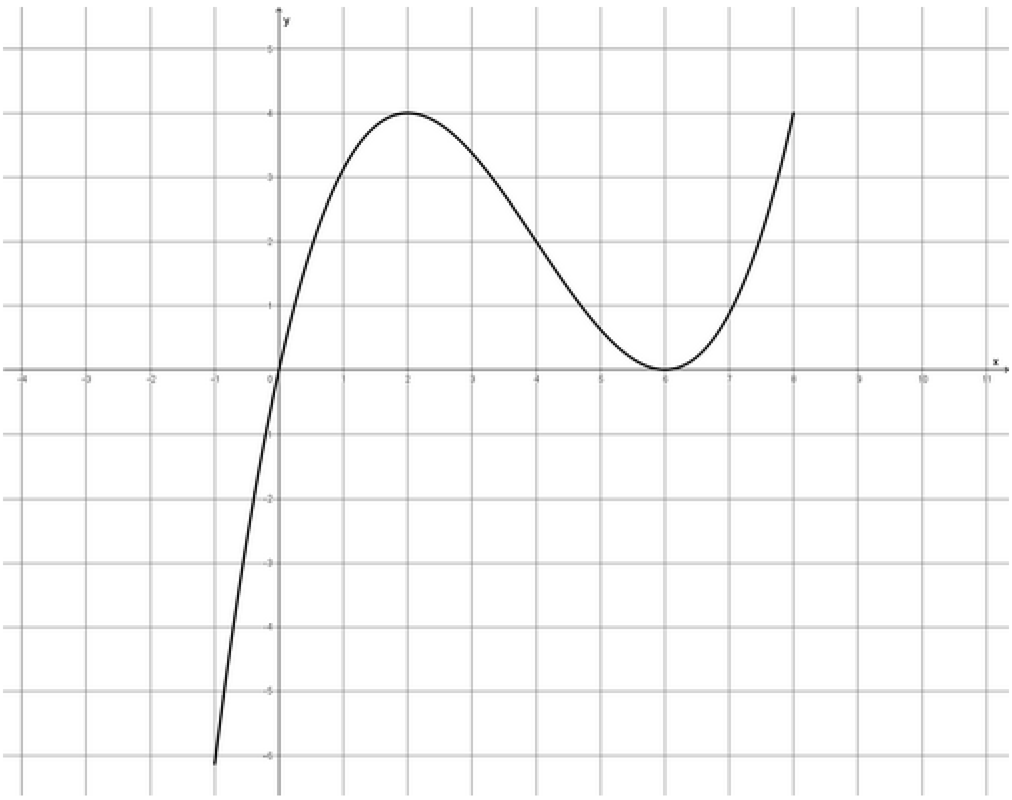
$0 = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} \,\Big|\, : \frac{3}{8}$ $\qquad$ $f_{-3}''(6) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow T$ $\qquad$ $f_{-3}(6) = 0$ $\qquad$ $T(6|0)$

$0 = x^2 - 8x + 12$ $\qquad$ $f_{-3}''(2) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow H$ $\qquad$ $f_{-3}(2) = 4$ $\qquad$ $H(2|4)$

$x_{E1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$

$x_{E1} = 6$ und $x_{E2} = 2$

b)



c) Wendepunkt berechnen

$f_{-3}''(x) = \frac{3}{4}x - 3$

$f_{-3}'''(x) = \frac{3}{4}$

$f_{-3}''(x_W) = 0$ $\qquad$ $f_{-3}''(x_W) = 0 \wedge f_{-3}'''(x_W) \neq 0$

$0 = \frac{3}{4}x - 3 \,\big|+3 \,\big|: \frac{3}{4}$ $\qquad$ $f_{-3}'''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow R - L - K$

$x_W = 4$ $\qquad$ $f_{-3}(4) = 2$ $\qquad$ $W_{R-L}(4|2)$

Tangente berechnen

$t(x) = m \cdot x + b$ $\qquad$ $f_{-3}'(4) = -1{,}5$ Steigung

$2 = -1{,}5 \cdot 4 + b \,\big|+6$

$b = 8$ $\qquad$ $t(x_w) = -1{,}5x + 8$

Steigungswinkel

$\tan(\alpha) = m$

$\tan^{-1}(m) = \alpha$

$\tan^{-1}(-1{,}5) = \alpha$

$\alpha = -56{,}31°$

d) $f_1(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

$f_2(x) = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x$

$f_1(x) = f_2(x)$

$\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x \,\Big| -\frac{1}{8}x^3$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = x^2 - 3x \,\Big| -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$ $\qquad$ beide Schreibweisen sind möglich, Brüche oder Kommazahlen

$0 = 0{,}5x^2 - 1{,}5x \,\big|: 0{,}5$

$0 = x^2 - 3x$ $\qquad$ $f_2(0) = 0$ $\qquad$ $S_1(0|0)$

$0 = x(x-3)$ $\qquad$ $f_2(3) = 3{,}375$ $\qquad$ $S_2(3|3{,}375)$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

e) $f_t(0) = \frac{1}{8} \cdot 0^3 + \frac{1}{2}t \cdot 0^2 - \frac{3}{2}t \cdot 0$

$f_t(0) = 0$ $\qquad$ Stimmt überein.

$f_t(3) = \frac{1}{8} \cdot 3^3 + \frac{1}{2}t \cdot 3^2 - \frac{3}{2}t \cdot 3$

$f_t(3) = \frac{27}{8} + \frac{9}{2}t - \frac{9}{2}t$

$f_t(3) = \frac{27}{8} = 3{,}375$ $\qquad$ Stimmt überein.

f) $f_t(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 - \frac{3}{2}tx$

$f_t'(x) = \frac{3}{8}x^2 + tx - \frac{3}{2}t$

$f_t''(x) = \frac{3}{4}x + t$

$f_t'''(x) = \frac{3}{4}$

$f_t''(x_W) = 0$ $\qquad$ $f_t''(x_W) = 0 \wedge f_t'''(x_W) \neq 0$

$0 = \frac{3}{4}x + t \,\Big|\, -t \,\Big|\, : \frac{3}{4}$ $\qquad$ $f_t'''\left(-\frac{4}{3}t\right) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow R-L-K$

$x_W = -\frac{4}{3}t$ $\qquad$ Der y-Wert ist nicht notwendig. $f_t\left(-\frac{4}{3}t\right) = \frac{16}{27}t^3 + 2t^2$

Steigung berechnen

$f_t'\left(-\frac{4}{3}t\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{4}{3}t\right)^2 + t \cdot \left(-\frac{4}{3}t\right) - \frac{3}{2}t$

$f_t'\left(-\frac{4}{3}t\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{16}{9}t^2\right) - \frac{4}{3}t^2 - \frac{3}{2}t$

$f_t'\left(-\frac{4}{3}t\right) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t^2 - \frac{3}{2}t$

$f_t'\left(-\frac{4}{3}t\right) = -\frac{2}{3}t^2 - \frac{3}{2}t$ Steigung in Abhängigkeit von t

$f_t'(x) = m$ mit $m = -1{,}5$

$-1{,}5 = -\frac{2}{3}t^2 - \frac{3}{2}t \,\Big|\, +1{,}5$

$0 = -\frac{2}{3}t^2 - \frac{3}{2}t + 1{,}5 \,\Big|\, : \left(-\frac{2}{3}\right)$

$0 = t^2 + \frac{9}{4}t - \frac{9}{4}$

$t_{1/2} = -\frac{9}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)^2 + \frac{9}{4}}$

$t_1 = \frac{3}{4}$ und $t_2 = -3$

Setzt man diese Werte jeweils für t ein, erhält man zwei Gleichungen. Berechnet man jeweils den Wendepunkt, so hat dieser bei beiden Gleichungen die Steigung -1,5.

g) Da nur die höchste Potenz für den Verlauf betrachtet wird, ist dieser unabhängig von t.

$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

Bei der Symmetrie muss man alle Potenzen betrachten. Fallunterscheidung!

t>0 und t<0
Das quadratische und das lineare x sind vorhanden, somit liegt keine Symmetrie vor, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

t=0 Das quadratische und das lineare x sind nicht vorhanden, somit liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor, da nur ein ungerader Exponent vorhanden ist.