Lösungen N 13

1. Aufgabe

a) $p(x) = -0{,}8x + 14$ => Höchstpreis HP = 14 GE

$p(x) = 0$ => $x = 17{,}5$ => Sättigungsmenge SM = 17,5 ME

$D_{ök} = [0; SM]$ also $D_{ök} = [0; 17{,}5]$

b) $E(x) = p(x) \cdot x$

$E(x) = (-0{,}8x + 14) \cdot x$

$E(x) = -0{,}8x^2 + 14x$

$E''(x) = -1{,}6$

Erlösmaximum

$E'(x) = 0 \wedge E''(x) \neq 0$

$E'(x) = -1{,}6x + 14$

$E(8{,}75) = 61{,}25$

$0 = -1{,}6x + 14$

$x = 8{,}75$

$E''(8{,}75) = -1{,}6 < 0 \Rightarrow$ Max.

Das Erlösmaximum liegt bei 61,25 GE und wird mit 8,75 ME erreicht.

c) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -0{,}8x^2 + 14x - (0{,}2x^3 - 3x^2 + 15x + 10)$

$G(x) = -0{,}8x^2 + 14x - 0{,}2x^3 + 3x^2 - 15x - 10$

$G(x) = -0{,}2x^3 + 2{,}2x^2 - x - 10$

Gewinnschwelle und –grenze erhält man mit $G(x) = 0$

$0 = -0{,}2x^3 + 2{,}2x^2 - x - 10 \,|\, : (-0{,}2)$

$0 = x^3 - 11x^2 + 5x + 50$

Polynomdivision mit $x_1 = 10$ ergibt $0 = x^2 - x - 5$

p-q liefert $x_2 = 2{,}8$ und $[x_3 = -1{,}8]$

Die Gewinnschwelle GS liegt bei 2,8 ME, die Gewinngrenze GG bei 10 ME.

d) gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{G\,max}$ mit

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G'(x) = -0{,}6x^2 + 4{,}4x - 1$

$G''(x) = -1{,}2x + 4{,}4$

$0 = -0{,}6x^2 + 4{,}4x - 1 \,|\, : (-0{,}6)$

$0 = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{5}{3}$

p-q liefert $x_1 = 7{,}1$ und $x_2 = 0{,}2$

$G''(7{,}1) = -4{,}1 < 0 \Rightarrow$ Max. $\quad x_{G\,max}$

$G''(0{,}2) = +4{,}1 > 0 \Rightarrow$ Min.

Cournot'scher Punkt

$C(x_{G\,max} \,|\, p(x_{G\,max}))$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$p(7{,}1) = 8{,}3$

$C(7{,}1 \,|\, 8{,}3)$ Bei 7,1 ME und einem Preis von 8,3 GE pro ME wird der maximale Gewinn erzielt.

2. Aufgabe

a) $D_{ök} = [0; x_{Kap}]$ also $D_{ök} = [0; 100]$

b) $K(100) = 5720$

$p(x) = 53$

$E(x) = 53x$

$E(100) = 5300$

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 5300 - 5720$

$G(x) = -420$

Man würde einen Verlust von 420 GE machen.

c) Gewinnzone = GG – GS => $G(x) = 0$ also erst G(x) bilden

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 53x - (0{,}01x^3 - x^2 + 50x + 720)$

$G(x) = 53x - 0{,}01x^3 + x^2 - 50x - 720)$

$G(x) = -0{,}01x^3 + x^2 + 3x - 720$ $\quad$ $G(x) = 0$

$0 = -0{,}01x^3 + x^2 + 3x - 720 \,|\, : (-0{,}01)$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 30$ ergibt $0 = x^2 - 70x - 2400$

$0 = x^3 - 100x^2 - 300x + 72000$

p-q liefert $x_2 = 95{,}2$ und $[x_3 = -25{,}2]$

GS = 30 ME und GG = 95,2 ME

$\text{Gewinnzone} = 95{,}2 - 30 = 65{,}2\text{ME}$

Die Gewinnzone hat eine Größe von 65,2 ME.
Vor der Gewinnschwelle macht man Verlust, nach der Gewinngrenze ebenfalls.

d) gewinnmaximale Ausbringungsmenge $x_{G\,max}$ mit

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\quad$ $0 = -0{,}03x^2 + 2x + 3 \,|\, : (-0{,}03)$

$G'(x) = -0{,}03x^2 + 2x + 3$ $\quad$ $0 = x^2 - \frac{200}{3}x - 100$

$G''(x) = -0{,}06x + 2$ $\quad$ p-q liefert $x_1 = 68{,}1$ und $[x_2 = -1{,}5]$

$G''(68{,}1) = -2{,}1 < 0 \Rightarrow \text{Max.} \quad x_{G\,max}$

$G(68{,}1) = 963{,}7$ Gewinnmaximum

Cournot'scher Punkt

$C(x_{G\,max} | p(x_{G\,max}))$ gewinnmaximale Menge und zugehöriger Preis

$p(68{,}1) = 53$, da Preis konstant => $C(68{,}1|53)$

Bei 68,1 ME und einem Preis von 53 GE pro ME wird der maximale Gewinn von 963,7 GE erzielt.

3. Aufgabe

a) $p(x) = 0$ => $SM = 9$ => $D_{ök} = [0;9]$

b) $E(x) = p(x) \cdot x$ => $E(x) = -2x^2 + 18x$

$G(x) = E(x) - K(x)$ => $G(x) = -0{,}25x^3 + 12x - 12{,}5$

c) $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\quad$ $0 = -0{,}75x^2 + 12 \,|\, : (-0{,}75)$

$G'(x) = -0{,}75x^2 + 12$ $\quad$ $0 = x^2 - 16 \,|\, + 16$

$G''(x) = -1{,}5x$ $\quad$ Wurzel ziehen ergibt $x_1 = 4$ und $[x_2 = -4]$

$G''(4) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max.} \quad x_{G\,max}$

$G(4) = 19{,}5$ Gewinnmaximum

$p(4) = 10$ => Cournot'scher Punkt $C(4|10)$

Bei 4 ME und einem Preis von 10 GE pro ME wird der maximale Gewinn von 19,5 GE erzielt.

4. Aufgabe

a) $G(x) = 0$

$0 = -x^3 + 9x^2 - 2x - 48 \,|\, : (-1)$

$0 = x^3 - 9x^2 + 2x + 48$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1 = 8$ ergibt $0 = x^2 - x - 6$

p-q liefert $x_2 = 3$ und $[x_3 = -2]$

$\text{Gewinnzone} = 8 - 3 = 5\text{ME}$

Die Gewinnzone hat eine Größe von 5 ME.

b) $G(x) = -x^3 + 9x^2 - 2x - 48$

$G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$ $\quad$ $0 = -3x^2 + 18x - 2 \,|\, : (-3)$

$G'(x) = -3x^2 + 18x - 2$ $\quad$ $0 = x^2 - 6x + \frac{2}{3}$

$G''(x) = -6x + 18$ $\quad$ p-q liefert $x_1 = 5{,}9$ und $x_2 = 0{,}1$

$G''(5{,}9) = -17{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Max.} \quad x_{G\,max}$

$G''(0{,}1) = +17{,}4 < 0 \Rightarrow \text{Min.}$

$G(5{,}9) = 48{,}1$ Gewinnmaximum

Bei 5,9 ME wird das Gewinnmaximum von 48,1 GE erreicht.

c) $E(x) = p(x) \cdot x \,|\, : x$ $\quad$ oder $\quad$ $E(x) = 0$ $\quad$ Nullstellen sind die Grenzen des $D_{ök}$

$p(x) = E(x) : x$ $\quad$ $0 = -3x^2 + 63x \,|\, : (-3)$

$p(x) = -3x + 63$ $\quad$ $0 = x^2 - 21x$

$p(x) = 0$ $\quad$ $0 = x(x - 21)$ => $x_1 = 0$ und $x_2 = 21$

SM = 21 ME $\quad$ also

$D_{ök} = [0;21]$ $\quad$ $D_{ök} = [0;21]$

d) $G(9) = -66$ Bei 9 ME macht man einen Verlust von 66 GE.

e) $G(x) = E(x) - K(x)$ umstellen in $K(x) = E(x) - G(x)$, daraus ergibt sich dann

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 65x + 48$

$K(10) = 498\text{GE}$

Bei 10 ME entstehen Kosten in Höhe von 498 GE.