Lösungen M 13

1. Aufgabe
a)

1. HB $S = f(x) + g(x)$ Funktionswerte = y-Werte

2. NB $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$
$g(x) = x^2 - 2x + 2$

3. $D = [0;4]$

4. $S(x) = -0{,}5x^2 + 2 + x^2 - 2x + 2$

$\boxed{S(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 4}$ **Zielfunktion**

5. $S'(x) = x - 2$
$S''(x) = 1$ $S'(x) = 0 \wedge S''(x) \neq 0$

$0 = x - 2$
$x = 2$
$S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

6. $f(2) = 0$
$g(2) = 2$ y-Werte

7. $S = 0 + 2$
$S = 2$

8. $S(0) = 4 > 2$
$S(4) = 4 > 2$

Der gesuchte x-Wert lautet 2, die y-Werte sind 0 und 2 und die minimale Summe ist 2.

b)

1. HB $D = f(x) - g(x)$ Funktionswerte = y-Werte

2. NB $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$
$g(x) = x^2 - 2x + 2$

3. $D = [0;4]$

4. $D(x) = -0{,}5x^2 + 2 - (x^2 - 2x + 2)$

$\boxed{D(x) = -1{,}5x^2 + 2x}$ **Zielfunktion**

5. $D'(x) = -3x + 2$
$D''(x) = -3$ $D'(x) = 0 \wedge D''(x) \neq 0$

$0 = -3x + 2$
$x = \frac{2}{3}$ oder 0,7
$D''(0{,}7) = -3 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $f(0{,}7) = 1{,}8$
$g(0{,}7) = 1{,}1$ y-Werte

7. $D = 1{,}8 - 1{,}1$
$D = 0{,}7$

8. $D(0) = 0 < 0{,}7$
$D(4) = -16 < 0{,}7$

Der gesuchte x-Wert lautet 0,7, die y-Werte sind 1,8 und 1,1 und die maximale Differenz ist 0,7.

2. Aufgabe

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $g(x) = -0{,}5x + 2$

3. $g(x) = 0$
$0 = -0{,}5x + 2$ $D = [0;4]$
$x = 4$

4. $A(x) = x \cdot (-0{,}5x + 2)$

$\boxed{A(x) = -0{,}5x^2 + 2x}$ **Zielfunktion**

5. $A'(x) = -x + 2$ $\quad A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(x) = -1$

$0 = -x + 2$

$x = 2$

$A''(2) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $g(2) = 1$ y-Wert

7. $A = 2 \cdot 1$

$A = 2$

8. $A(0) = 0 < 2$

$A(4) = 0 < 2$

Das Rechteck hat eine Breite von 2 LE, eine Höhe von 1 LE und einen Flächeninhalt von 2 FE.

3. Aufgabe

1. HB $A = 0{,}5\pi \cdot r^2 + 2r \cdot x$ Querschnitt = Fläche; Halbkreis + Rechteck (Breite 2r, Höhe x)

2. NB $5 = \pi \cdot r + 2x + 2r$

3. $5 - \pi \cdot r - 2r = 2x$

$\boxed{x = 2{,}5 - 0{,}5\pi \cdot r - r}$

$x = 0$

$0 = 2{,}5 - 0{,}5\pi \cdot r - r$ => $D = [0;1]$

$r = 1$

4. $A(r) = 0{,}5\pi \cdot r^2 + 2r \cdot (2{,}5 - 0{,}5\pi \cdot r - r)$

$\boxed{A(r) = -0{,}5\pi \cdot r^2 - 2r^2 + 5r}$ **Zielfunktion**

5. $A'(r) = -\pi \cdot r - 4r + 5$ $\quad A'(r) = 0 \wedge A''(r) \neq 0$

$A''(r) = -\pi - 4$

$0 = -\pi \cdot r - 4r + 5 \mid + 4r + \pi \cdot r$

$4r + \pi \cdot r = 5$

$r(4 + \pi) = 5 \mid : (4 + \pi)$

$r = 0{,}7$

$A''(0{,}7) = -7{,}1 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $x = 2{,}5 - 0{,}5\pi \cdot 0{,}7 - 0{,}7$

$x = 0{,}7$

7. $A = 0{,}5\pi \cdot 0{,}7^2 + 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7$

$A = 1{,}7$

8. $A(0) = 0 < 1{,}7$

$A(1) = 1{,}4 < 1{,}7$

Der Abwasserkanal hat eine Breite von 1,4 m, eine Höhe von 0,7 m außen und 1,4 m in der Mitte und einen Querschnitt von 1,7 m².

4. Aufgabe

a)

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB

Die Kante des abgebrochenen Stücks stellt eine lineare Funktion dar. Die beiden Eckpunkte der Kante $P_1(100 l 84)$ und $P_2(130 l 60)$ sind Punkte der Gerade.

Steigungsberechnung:

$$m = \frac{60 - 84}{130 - 100} = \frac{-24}{30} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

$g(x) = m \cdot x + b$ mit Steigung und beispielsweise P_1 ergibt

$84 = -0{,}8 \cdot 100 + b \,|\, + 80$

$b = 164$

$g(x) = -0{,}8x + 164$ Das ist die Nebenbedingung.

3. $D = [0;130]$ Die Glasscheibe ist nicht länger als 130 cm. g(x)=0 ist hier verkehrt (Realsituation)

4. $A(x) = x \cdot (-0{,}8x + 164)$

$\boxed{A(x) = -0{,}8x^2 + 164x}$ **Zielfunktion**

5. $A'(x) = -1{,}6x + 164$ $\quad A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(x) = -1{,}6$

$0 = -1{,}6x + 164$

$x = 102{,}5$

$A''(102{,}5) = -1{,}6 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $g(102{,}5) = 82$

7. $A = 102{,}5 \cdot 82$

$A = 8405$

8. $A(0) = 0 < 8405$

$A(130) = 7800 < 8405$

Die neue Glasscheibe ist 102,5 cm lang und 82 cm breit und der Flächeninhalt beträgt 8405 cm².

b)

$A_{ges} = 130 \cdot 84$

$A_{ges} = 10920$

$10920 - 8405 = 2515 \text{Verlust}$

$x = \frac{2515 \cdot 100}{10920}$

$x = 23\%$

Dem Glaser entsteht ein Verlust von 23%.

5. Aufgabe

Rechteckiges Ackerland mit 6 km Umfang.

1. HB $A = x \cdot y$

2. NB $6 = 2x + 2y$

3. $6 - 2x = 2y$

$\boxed{y = 3 - x}$

$y = 0$

$0 = 3 - x$ $\quad$ => $D = [0;3]$

$x = 3$

4. $A(x) = x \cdot (3 - x)$

$\boxed{A(x) = -x^2 + 3x}$ **Zielfunktion**

5. $A'(x) = -2x + 3$ $\quad A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(x) = -2$

$0 = -2x + 3$

$x = 1{,}5$

$A''(1{,}5) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

6. $y = 3 - 1{,}5$

$y = 1{,}5$

7. $A = 1{,}5 \cdot 1{,}5$

$A = 2{,}25$

8. $A(0) = 0 < 2{,}25$

$A(3) = 0 < 2{,}25$

Das Ackerland ist 1,5 km breit und 1,5 km lang und der Flächeninhalt beträgt 2,25 km².