Lösungen J 18

1. Aufgabe

$s(t) = v_0 \cdot t + at^2$ mit $v_0 = 30m/s$ und $a = -0{,}5m/s^2$ *einsetzen ergibt*

$s(t) = 30 \cdot t - 0{,}5t^2$ *umstellen*

$s(t) = -0{,}5t^2 + 30t$ **Weg**

$s'(t) = -t + 30$ **Geschwindigkeit**

$s''(t) = -1$ **Beschleunigung**

a) $s(12) = 288$

$s'(12) = 18$

Der LKW hat nach 12 Sekunden eine Strecke von 288 Metern zurückgelegt und besitzt dann eine Geschwindigkeit von 18 m/s.

b) $s'(t) = 21$

$21 = -t + 30 \mid -21 + t$

$t = 9$

Nach 9 Sekunden hatte der LKW eine Geschwindigkeit von 21 m/s.

c) Vorgegeben ist die Strecke von 300 Metern und die dann erlaubte Geschwindigkeit. Man muss nun zuerst die Zeit ausrechnen, die der LKW für diese Strecke braucht, und kann dann seine Geschwindigkeit berechnen und vergleichen.

$s(t) = 300$

$300 = -0{,}5t^2 + 30t \mid -300$

$0 = -0{,}5t^2 + 30t - 300 \mid :(-0{,}5)$

$0 = t^2 - 60t + 600$

$t_{1/2} = +30 \pm \sqrt{30^2 - 600}$

$t_1 \approx 47{,}32$ und $t_1 \approx 12{,}68$

Da beide Zeiten ein positives Vorzeichen besitzen, kann man hier keine Lösung ausschließen.

$s'(47{,}32) = -17{,}32$

$s'(12{,}68) = 17{,}32$

Eine negative Geschwindigkeit bedeutet Rückwärtsfahren, somit scheidet die Lösung t_1 aus.

Nach 300 Metern hat der LKW noch eine Geschwindigkeit von 17,32 m/s, also hat er die geforderten 17 m/s nicht erreicht.

Anmerkung: *Rechnet man die Geschwindigkeiten in km/h um so ergibt sich:*

$17{,}32 \cdot 3{,}6 = 62{,}352km/h$

$17 \cdot 3{,}6 = 61{,}2km/h$

Die Geschwindigkeitsbegrenzung in der Baustelle wurde vermutlich auf 60 km/h festgelegt. Somit liegt die Geschwindigkeit des LKW noch in der Toleranz.

2. Aufgabe

a) $f(0) = 38{,}4$

Zu Beginn der Behandlung hatte der Patient eine Temperatur von 38,4°C.

b) Zeitpunkt = x-Wert, Temperatur am höchsten = Hochpunkt

$f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 38{,}4$

$f'(x) = -0{,}4x^3 + 1{,}6x$

$f''(x) = -1{,}2x^2 + 1{,}6$

$f'(x_E) = 0$

$0 = -0{,}4x^3 + 1{,}6x$

TR: $x_{E1} = 0$; $x_{E2} = 2$; $x_{E3} = -2 \notin D$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(0) = 1{,}6 > 0 \Rightarrow T$

$f''(2) = -3{,}2 < 0 \Rightarrow H$

Nach 2 Tagen war die Temperatur am höchsten.

c) stärkster Anstieg im Wendepunkt

$f''(x_W) = 0$

$0 = -1{,}2x^2 + 1{,}6$

TR: $x_{W1} \approx 1{,}15$; $x_{W2} \approx -1{,}15 \notin D$

$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$ mit $f'''(x) = -2{,}4x$

$f'''(1{,}15) = -2{,}76 < 0 \Rightarrow L - R - K$

Nach 1,15 Tagen (im Laufe des zweiten Tages) stieg die Temperatur am stärksten an.

d) $f(x) = 37{,}5$

$37{,}5 = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 38{,}4 \,|\, -37{,}5$

$0 = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 0{,}9 \,|\, : (-0{,}1)$

$0 = x^4 - 8x^2 - 9$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 8z - 9$

$z_{1/2} = +4 \pm \sqrt{16 + 9}$

$z_1 = 9$ und $z_2 = -1$

$z = x^2$

$x^2 = 9 \,|\, \sqrt{}$ $\qquad$ $x^2 = -1 \,|\, \sqrt{}$

$x_1 = 3$ und $x_2 = -3 \notin D$ $\qquad$ $x_{3/4} = $ n.l.

Nach 3 Tagen hatte der Patient wieder eine Temperatur von 37,5°C.

<u>3.Aufgabe</u>

a) Funktion f(x) und Stelle $x = 1$ sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8$ $\qquad$ $x = 1$ $\quad$ $f(1) = 6{,}75$ $\quad$ y-Wert

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x$ $\qquad$ $x = 1$ $\quad$ $f'(1) = -2{,}25$ $\quad$ m

$t(x) = m \cdot x + b$

$6{,}75 = -2{,}25 \cdot 1 + b$

$9 = b$

=> $t(x) = -2{,}25x + 9$

$t(x) = f(x)$

$-2{,}25x + 9 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \,|\, + 2{,}25x - 9$

$0 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}25x - 1$

TR: $x_{1/2} = 1$; $x_3 = 4$

Die Stelle x = 1 ist doppelte Lösung, also Tangente.

Die Stelle x = 4 liefert den gesuchten Punkt.

$f(4) = 0 \quad P(4|0)$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

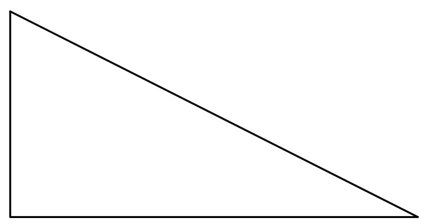
(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)

b) Die Länge der Strecke von A nach P berechnet man mit dem Satz des Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$ oder der Abstandsformel

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

und den Punkten $A(1|6{,}75)$ und $P(4|0)$.



Pythagoras:
Im rechtwinkligen Steigungsdreieck arbeitet man mit der Differenz der x- und y-Werte.

$a = 4 - 1 = 3$

$b = 6{,}75 - 0 = 6{,}75$

$a^2 + b^2 = c^2$

$3^2 + 6{,}75^2 = c^2$

$54{,}5625 = c^2 \;|\sqrt{\;}$

=> $c \approx 7{,}39$ Längeneinheiten

$\text{Entfernung} = 7{,}39 \cdot 5 = 36{,}95 \approx 37\text{m}$

Die Entfernung (Luftlinie) vom Abschusspunkt A zum Auftreffpunkt P beträgt 37 Meter.

Abstandsformel
Punkte einsetzen und d berechnen

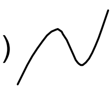
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(4 - 1)^2 + (0 - 6{,}75)^2}$

$d \approx 7{,}39$

c) $f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$ (Der Graph kommt von unten und geht nach oben.) 

3. Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|8)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \,|: 0{,}25$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^3 - 6x^2 + 32$ Polynomdivision mit $x_{N1} = 4$ (TR)

$(x^3 - 6x^2 + 0x + 32) : (x - 4) = x^2 - 2x - 8$

$\underline{-(x^3 - 4x^2)}$

$-2x^2 + 0x$

$\underline{-(-2x^2 + 8x)}$

$-8x + 32$

$\underline{-(-8x + 32)}$

0

$x_{N2/3} = +1 \pm \sqrt{1 + 8}$ pq-Formel

$x_{N2} = 4$

$x_{N3} = -2$

$S_{x1/2}(4|0) \quad S_{x3}(-2|0)$

$$f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x$$

Ableitungen $f''(x) = 1{,}5x - 3$

$$f'''(x) = 1{,}5$$

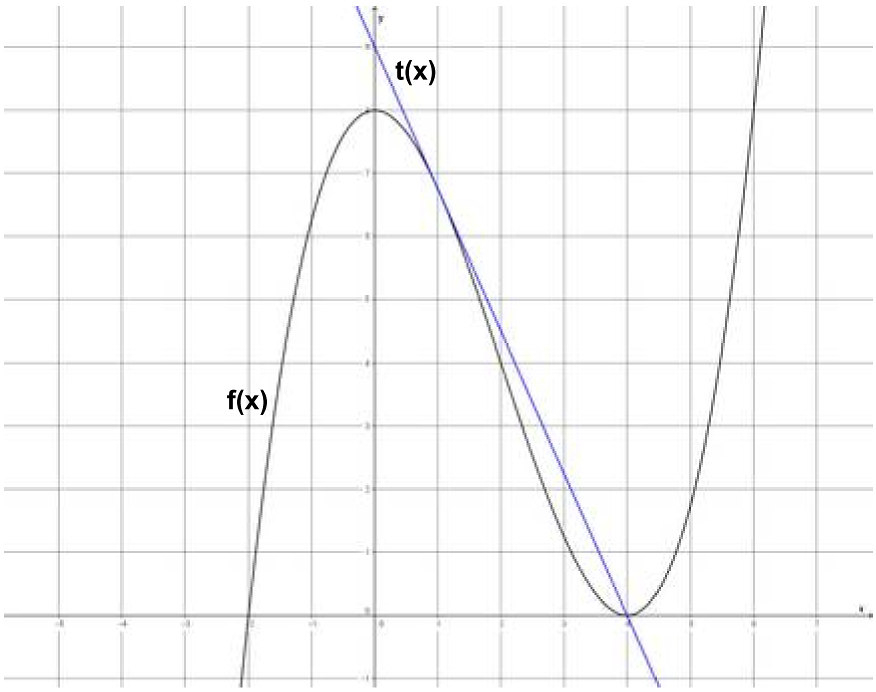
5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$	2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = 0{,}75x^2 - 3x \,|\, : 0{,}75$	$f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow H$	$f(0) = 8$	$H(0|8)$
$0 = x^2 - 4x$	$f''(4) = 3 > 0 \Rightarrow T$	$f(4) = 0$	$T(4|0)$
$0 = x(x-4)$			
$x_{E1} = 0$	$M_1 =]-\infty;0]$ monoton steigend		
$x_{E2} = 4$	$M_2 = [0;4]$ monoton fallend		
	$M_3 = [4;+\infty[$ monoton steigend		

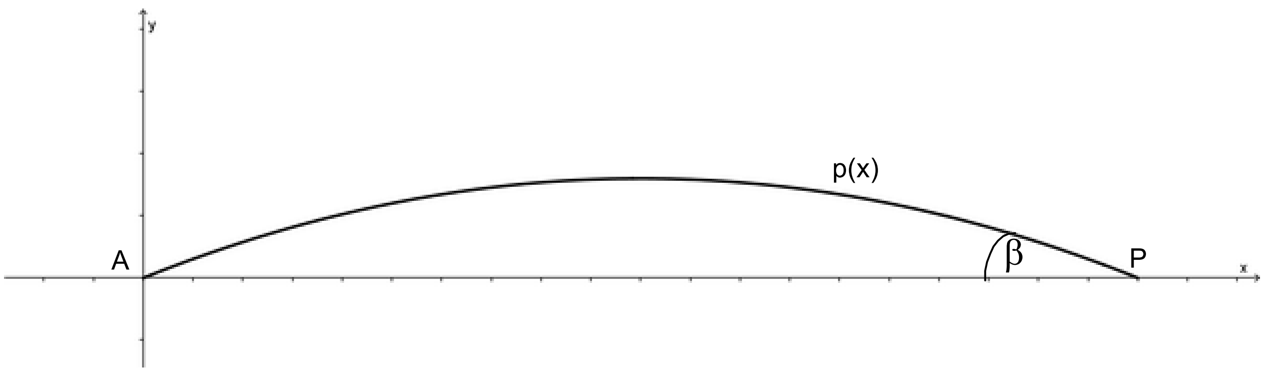
6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$	2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = 1{,}5x - 3 \,|\, +3 \,|\, : 1{,}5$	$f'''(2) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow R-L-K$	$f(2) = 4$	$W_{R-L}(2|4)$
$x_W = 2$			

7. Zeichnung



d)



Auftreffpunkt P bei p(x):

$p(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x \;\Big|\; :\left(-\frac{1}{500}\right)$

$0 = x^2 - 40x$

$0 = x(x-40)$

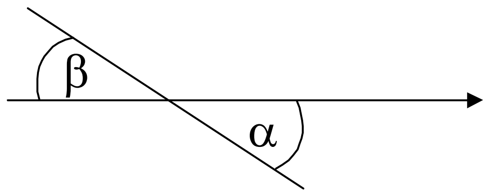
$x_{N1} = 0$; $x_{N2} = 40$ $P_{neu}(40|0)$

Der Auftreffwinkel β ergibt sich aus dem Steigungswinkel der Parabel im Auftreffpunkt.

$\tan(\alpha) = m$ und $p'(x) = m$

$p(x) = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x$

$p'(x) = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25}$



$p'(40) = -\frac{2}{25}$ also $m = -\frac{2}{25}$

$\tan^{-1}(m) = \alpha$

$\tan^{-1}\left(-\frac{2}{25}\right) = \alpha$

$\alpha = -4{,}57°$ (negativer Winkel, da fallende Tangente; Winkel unterhalb der x-Achse)

$\beta = 4{,}57°$

Der Winkel β beträgt 4,57°.

e) Die größte Höhe der Flugbahn liegt im Hochpunkt (Scheitelpunkt) der Parabel vor.

$p(x) = -\frac{1}{500}x^2 + \frac{2}{25}x$

$p'(x) = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25}$

$p''(x) = -\frac{1}{250}$

1. Schritt $p'(x_E) = 0$

$0 = -\frac{1}{250}x + \frac{2}{25} \;\Big|\; :\left(-\frac{1}{250}\right)$

$0 = x - 20$

$x_E = 20$

2. Schritt $p'(x_E) = 0 \wedge p''(x_E) \neq 0$

$p''(20) = -\frac{1}{250} < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(20) = 0{,}8$ $H(20|0{,}8)$

Der Stein erreicht eine größte Höhe von 0,8 Metern.