Lösungen J 14

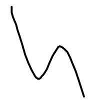
1. Aufgabe

$f(x) = -x^3 - 4x^2 + 11x - 6$

$f'(x) = -3x^2 - 8x + 11$

$f''(x) = -6x - 8$

$f'''(x) = -6$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$; $x \to +\infty;\ f(x) \to -\infty$  **3**. KS

4. $S_y(0|-6)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$0 = -x^3 - 4x^2 + 11x - 6 \,|\, :(-1)$

$0 = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt

$0 = x^2 + 5x - 6$ p-q liefert $x_2 = 1$ und $x_3 = -6$

=> $S_{x1/2}(1|0)$ $S_{x3}(-6|0)$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

$0 = -3x^2 - 8x + 11 \,|\, :(-3)$ $f''(1) = -14 < 0 \Rightarrow H$ $f(1) = 0$ $H(1|0)$

$0 = x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{11}{3}$ $f''\left(-\frac{11}{3}\right) = 14 > 0 \Rightarrow T$ $f\left(-\frac{11}{3}\right) = -50{,}8$ $T(-3{,}7|-50{,}8)$

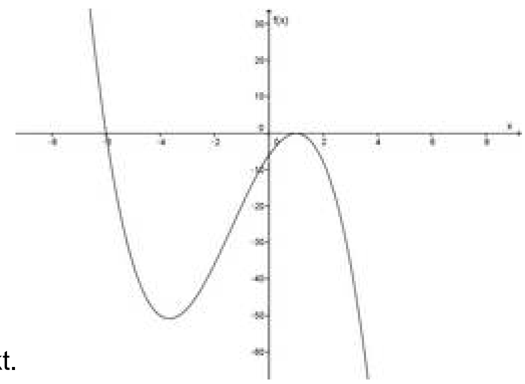
p-q ergibt $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{11}{3}$

5. Wendepunkte $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = -6x - 8$ $f'''\left(-\frac{4}{3}\right) = -6 < 0 \Rightarrow L - R\_K$

$x = -\frac{4}{3}$ $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -25{,}4$

=> $W_{L-R}(-1{,}3|-25{,}4)$



Keine Zeichnung aufgrund der hohen Werte bei Tief- und Wendepunkt.
Bei günstiger Achseneinteilung ergibt sich nebenstehende Zeichnung.

2. Aufgabe

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$0 = d$
$x = 0;\ m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$0 = c$
$(2\|-6)$	$f(2) = -6$	III	$-6 = 8a + 4b + 2c + d$
$x = 1;\ m = -3{,}5$	$f'(1) = -3{,}5$	IV	$-3{,}5 = 3a + 2b + c$

Die Variablen c und d sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

$-6 = 8a + 4b$

$-3{,}5 = 3a + 2b \,|\, \cdot(-2)$ => $-6 = 8a + 4b$; $7 = -6a - 4b$ $\}+$ ergibt $1 = 2a \,|\, :2$ also $a = 0{,}5$

Durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen berechnet man: $b = -2{,}5$.

Man erhält die gesuchte Funktionsgleichung. $f(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}5x^2$

3. Aufgabe

$tan\,\alpha = m$ => $tan\,78{,}69° = 5$ also $m = 5$ und $f'(x) = m$

$f(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}25x^2 - 10x + 12$

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 4{,}5x - 10$

$5 = 1{,}5x^2 - 4{,}5x - 10 \,|\, -5$ p-q ergibt $x_1 = 5$ $x_2 = -2$ Es gibt also zwei Tangenten!

$0 = 1{,}5x^2 - 4{,}5x - 15 \,|\, : 1{,}5$

$0 = x^2 - 3x - 10$

p-q ergibt $x_1 = 5$ und $x_2 = -2$ Es gibt also zwei Tangenten!

$t_1(x)$	$t_2(x)$
$f(5) = -31{,}75$ y-Wert	$f(-2) = 19$ y-Wert
$t_1(x) = m \cdot x + b$	$t_2(x) = m \cdot x + b$
$-31{,}75 = 5 \cdot 5 + b$	$19 = 5 \cdot (-2) + b$
$b = -56{,}75$	$b = 29$
$t_1(x) = 5x - 56{,}75$	$t_2(x) = 5x + 29$

4. Aufgabe

Um den Wendepunkt zu berechnen, muss man die zweite Ableitung gleich null setzen. Beim Ableiten fällt die Variable a weg, daher kann man die Rechnung durchführen.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + a$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$ $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ $0 = 6x - 12$ $f'''(2) = 6 > 0$ => $R - L - K$

$f''(x) = 6x - 12$ $x = 2$

$f'''(x) = 6$

Also liegt die Wendestelle bei x = 2.

Um den y-Wert zu ermitteln, setzt man den x-Wert in die Tangentengleichung ein, da der Berührpunkt zu beiden Funktionen gehört.

$t(2) = -5$ also $W_{R-L}(2|-5)$

Setzt man den Wendepunkt in die Ausgangsfunktion ein, kann man a berechnen.

$-5 = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + a$ => $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 5$

$-5 = a$

5. Aufgabe

$f(x) = -x^4 + 2x^3$

$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$ $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ $0 = -12x^2 + 12x \,|\, : (-12)$

$f''(x) = -12x^2 + 12x$ $0 = x^2 - x$

$f'''(x) = -24x + 12$

Man kann x ausklammern oder p-q machen =>

$[x_1 = 0] \wedge x_2 = 1$

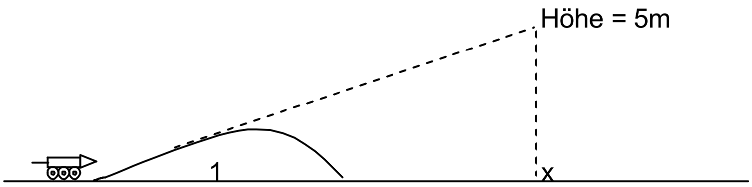
Da die Null nicht zum Definitionsbereich gehört, kann man diese Lösung eckig einklammern und bei der weiteren Untersuchung weglassen.

$f'''(1) = -12 < 0$ => $L - R - K$ $f(1) = 1$ $W_{L-R}(1|1)$

Tangente: $t(x) = m \cdot x + b$

$f'(x) = m$ einsetzen $1 = 2 \cdot 1 + b$ => $t(x) = 2x - 1$

$f'(1) = 2$ $b = -1$



Die Höhe 5m ist der y-Wert für die Tangente, also $t(x) = 5$

$5 = 2x - 1$

$x = 3$ 3 – 1 = 2 => Die Rakete hat 2 m nach dem Abheben die Höhe 5 m.

<u>6. Aufgabe</u>

a) $f(0) = 37{,}3$ Zu Beginn liegt die Temperatur bei 37,3°C.

$f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 37{,}3$

b) $f'(x) = -0{,}4x^3 + 1{,}6x$ $f'(x) = 0 \;\wedge\; f''(x) \neq 0$

$f''(x) = -1{,}2x^2 + 1{,}6$

$0 = -0{,}4x^3 + 1{,}6x \quad |:(-0{,}4)$

x ausklammern ergibt $x_1 = 0$ und $0 = x^2 - 4$

$0 = x^3 - 4x$

$x_2 = 2$ und $[x_3 = -2]$ nicht im Def.

$f''(0) = 1{,}6 > 0 \quad Tp$

$f''(2) = -3{,}6 < 0 \quad Hp$

=> Am zweiten Tag ist die Temperatur am höchsten.

c)

$f(x) = 36{,}4$

$36{,}4 = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 37{,}3 \quad |-36{,}4$

Substitution $x^2 = z$ => $0 = z^2 - 8z - 9$

$0 = -0{,}1x^4 + 0{,}8x^2 + 0{,}9 \quad |:(-0{,}1)$

$0 = x^4 - 8x^2 - 9$

Das Lösen mit p-q ergibt: $z_1 = 9$ und $z_2 = -1$.

Resubstitution mit $z = x^2$ => $x^2 = 9$ und $x^2 = -1$; Wurzel ziehen nur bei $x^2 = 9$ möglich, $x^2 = -1$ bringt keine Lösungen.

$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$

$x_1 = 3$ Die Versuchsperson hat nach drei Tagen 36,4°C erreicht.

$[x_2 = -3]$