Lösungen 2

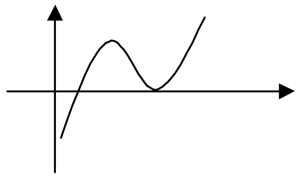
1. Aufgabe

Fläche mit der x-Achse => Nullstellen berechnen von $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+6x-4$

$f(x)=0$

Polynomdivision mit $x_1=1$ ergibt $0=x^2-8x+16$

p-q ergibt $x_{2/3}=4$



$$A=\int_1^4\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+6x-4\right)dx$$

$$A=\left[\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^3+3x^2-4x\right]_1^4$$

$$A=[0]-\left[-\frac{27}{16}\right]$$

$$A=\frac{27}{16}=1{,}7\text{FE}$$

2. Aufgabe

Fläche zwischen den beiden Tiefpunkten => Extrempunkte und Nullstellen berechnen

$f(x)=x^4-20x^2+64$ biquadratische Funktion, also achsensymmetrisch (Substitution)

Nullstellen mit $f(x)=0$

$0=x^4-20x^2+64$ Befehl $x^2=z$

$0=z^2-20z+64$

p-q ergibt $z_1=16$ und $z_2=4$

Resubstitution mit $z=x^2$ und Wurzel ziehen

$x_1=4$; $x_2=-4$; $x_3=2$; $x_4=-2$

Extrempunkte mit $f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$

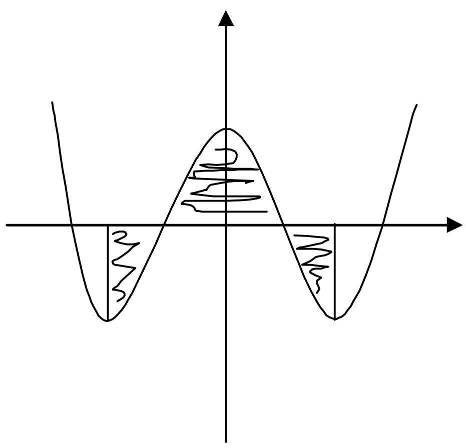
$f'(x)=4x^3-40x$

$f''(x)=12x^2-40$

x ausklammern ergibt $x_1=0$

Wurzelziehen führt zu $x_2=3{,}2$ und $x_2=-3{,}2$

Überprüfung in zweiter Ableitung ergibt Tp bei x = 3,2 und x = -3,2 Hp bei x = 0



Berechnung der schraffierten Fläche:
Wegen der Achsensymmetrie berechnet man nur die rechte Seite.

$$A_1=\int_0^2(x^4-20x^2+64)dx$$

$$A_1=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+64x\right]_0^2$$

$$A_1=\left[81\frac{1}{15}\right]-[0]$$

$$A_1=81{,}1\text{FE}$$

$$A_2=\left|\int_2^4(x^4-20x^2+64)dx\right|$$

$$A_2=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{20}{3}x^3+64x\right]_2^4\right|$$

$$A_1=\left|[53{,}5]-\left[81\frac{1}{15}\right]\right|$$

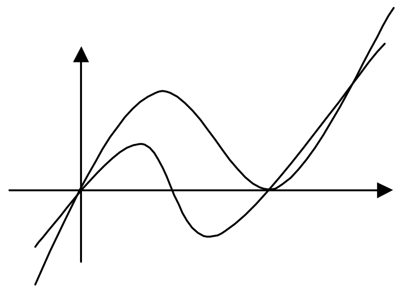
$$A_2=|-27{,}6|$$

$$A_2=27{,}6\text{FE}$$

$$A_{ges}=2\cdot(A_1+A_2)=2\cdot(81{,}1+27{,}6)=217{,}4\text{FE}$$

3. Aufgabe

Fläche zwischen zwei Funktionen => Schnittpunkte



$f_1(x) = f_2(x)$

$x^3 - 8x^2 + 16x = 0{,}4x^3 - 2{,}6x^2 + 4x$

$0 = 0{,}6x^3 - 5{,}4x^2 + 12x$ aufzuleitende Funktion

x ausklammern ergibt $x_1 = 0$

p-q ergibt $x_2 = 5$ und $x_3 = 4$

$A_1 = \int_0^4 (0{,}6x^3 - 5{,}4x^2 + 12x)dx$

$A_1 = \left[0{,}15x^4 - 1{,}8x^3 + 6x^2\right]_0^4$

$A_1 = [19{,}2] - [0]$

$A_1 = 19{,}2FE$

$A_2 = \left|\int_4^5 (0{,}6x^3 - 5{,}4x^2 + 12x)dx\right|$

$A_2 = \left|\left[0{,}15x^4 - 1{,}8x^3 + 6x^2\right]_4^5\right|$

$A_1 = \left|[18{,}75] - [19{,}2]\right|$

$A_2 = |-0{,}45|$

$A_2 = 0{,}5FE$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 19{,}2 + 0{,}5 = 19{,}7FE$

4. Aufgabe

Auch wenn eine Grenze nicht bekannt ist, kann man aufleiten.

$f(x) = 4x^3 - 6x$ mit $[2 : b]$ und $b > 0$ sowie $A = 50FE$

$A = \int_2^b (4x^3 - 6x)dx$

$A = \left[x^4 - 3x^2\right]_2^b$

$50 = \left[b^4 - 3b^2\right] - [4]$

$50 = b^4 - 3b^2 - 4 \,|\, -50$

$0 = b^4 - 3b^2 - 54$

$b_2 = z$

Substitution lösen mit p-q ergibt

$z_1 = 9$ und $z_2 = -6$

Resubstitution mit $z = b^2$

$b^2 = 9 \,|\sqrt{\ }$ und $b^2 = -6 \,|\sqrt{\ }$

$b_1 = 3$ nicht lösbar

$[b_2 = -3]$

Die obere Grenze b hat also einen Wert von +3.

5. Aufgabe

Fläche mit x-Achse => Nullstellen

$f(x) = 0$

$0 = -x^2 + 2x + 3 \,|\, :(-1)$

lösen mit p-q ergibt $x_1 = 3$ und $[x_2 = -1]$

Da sich die Fläche nur im ersten Quadranten befinden soll (untere Grenze bei 0), entfällt die zweite Nullstelle.

$A = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx$

$A = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_0^3$

$A = [9] - [0]$

$A = 9FE$

6. Aufgabe

a) $A = \int_0^1 (x + 21{,}5)dx$ $\qquad A = [22] - [0]$

$A = [0{,}5x^2 + 21{,}5x]_0^1$ $\qquad A = 22FE$

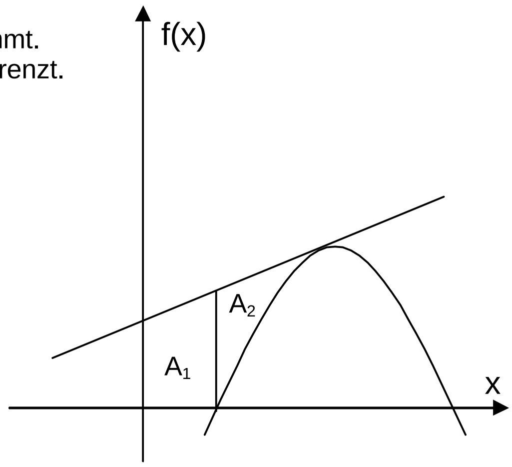
b) $f(x) = 0$

lösen mit p-q ergibt $x_1 = 19$ und $x_2 = 3$

$A = \int_3^{19} (-0{,}5x^2 + 11x - 28{,}5)dx$ $\qquad A = [300{,}8] - [-40{,}5]$

$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5{,}5x^2 - 28{,}5x\right]_3^{19}$ $\qquad A = 341{,}3FE$

c) Hier wird wieder scheibchenweise die Fläche bestimmt.
Die erste Teilfläche ist nur von x-Achse und t(x) begrenzt.



$A_1 = \int_0^3 (x + 21{,}5)dx$

$A_1 = [0{,}5x^2 + 21{,}5x]_0^3$

$A_1 = [69] - [0]$

$A_1 = 69FE$

Die zweite Teilfläche wird von beiden Funktionen begrenzt. => Schnittpunkte

$f(x) = t(x)$

$-0{,}5x^2 + 11x - 28{,}5 = x + 21{,}5$

$-0{,}5x^2 + 10x - 50 = 0$ aufzuleitende Funktion

lösen mit p-q ergibt $x_{1/2} = 10$

(doppelter Schnittpunkt da Tangente)

$A_2 = \left|\int_3^{10} (-0{,}5x^2 + 10x - 50)dx\right|$

$A_2 = \left|\left[-\frac{1}{6}x^3 + 5x^2 - 50x\right]_3^{10}\right|$

$A_2 = |[-166{,}7] - [-109{,}5]|$

$A_2 = |-57{,}2|$

$A_2 = 57{,}2FE$

$A_{ges} = A_1 + A_2 = 69 + 57{,}2 = 126{,}2FE$

Solche komplexeren Aufgaben kann man auch über eine Differenzrechnung lösen:
A_1 mit t(x) von 0;10
A_2 mit f(x) von 3;10
Und jetzt $A_{ges} = A_1 - A_2$ ergibt aber auch den gleichen Flächeninhalt (265 – 138,8 = 126,2)
Welchen Weg man wählt, muss jeder selbst entscheiden. Der Rechenaufwand ist gleich.