Lösungen I 18

1. Aufgabe

a) $f(0) = 90$ Es sind 90 Kaninchen entwichen.

b) Hier sind Hoch- und Tiefpunkt gesucht.

$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 90$ $\quad f'(x_E) = 0$

$f'(x) = -6x^2 + 36x - 30$ $\quad 0 = -6x^2 + 36x - 30 \,|\, :(-6)$

$f''(x) = -12x + 36$ $\quad 0 = x^2 - 6x + 5$

mit p-q ergibt sich $x_{E1} = 5$ und $x_{E2} = 1$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(5) = -24 < 0 \Rightarrow H$ $\quad f(5) = 140$ $\quad H(5|140)$

$f''(1) = 24 > 0 \Rightarrow T$ $\quad f(1) = 76$ $\quad T(1|76)$

Nach 5 Jahren war die Population am größten mit 140 Kaninchen, nach einem Jahr am kleinsten mit 76 Kaninchen.

c) $f(x) = 130$

$130 = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 90 \,|\, -130$

$0 = -2x^3 + 18x^2 - 30x - 40$

TR: $x_1 = 4$, $x_2 \approx 5{,}85$ und $x_3 \approx -0{,}85 \notin D$

(Die Zahl -0,85 liegt vor dem Ausbruch, ist somit nicht im Definitionsbereich vorhanden und wird nicht weiter beachtet.)

Nach 4 und nach 5,85 Jahren (im sechsten Jahr) befanden sich 130 Kaninchen im Volk.

d) größte Wachstumsrate = Steigung im Wendepunkt

$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 90$

$f'(x) = -6x^2 + 36x - 30$

$f''(x) = -12x + 36$

$f'''(x) = -12$

$f''(x_W) = 0$

$0 = -12x + 36$

$x_W = 3$

$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(3) = -12 < 0 \Rightarrow L-R-K$

$f(3) = 108$ $\quad W_{L-R}(3|108)$

$f'(x) = m$

$f'(3) = 24$

Die größte positive Wachstumsrate gibt es nach 3 Jahren und beträgt 24 (Kaninchen pro Jahr). Zu diesem Zeitpunkt sind 108 Kaninchen vorhanden.

e) x gegeben, Steigung berechnen

$f'(x) = m$

$f'(1{,}5) = 10{,}5$

Steigung gegeben, x-Werte berechnen

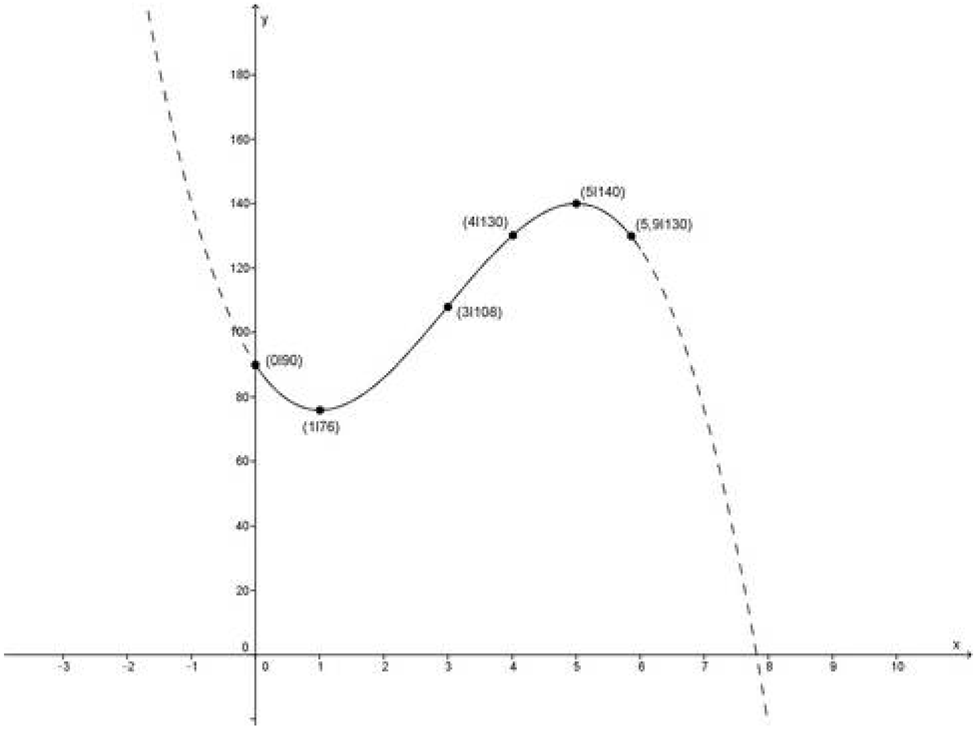
$f'(x) = m$

$10{,}5 = -6x^2 + 36x - 30$

Umformen und p-q-Formel ergibt: $x_1 = 4{,}5$ und $x_2 = 1{,}5$

Nach 1,5 Jahren beträgt die Wachstumsrate 10,5 Kaninchen pro Jahr. Diese liegt wieder nach 4,5 Jahren vor.

f)



Der durchgezogene Teil kann mithilfe der berechneten Werte gezeichnet werden. Der gestrichelte Teil ist der weitere Verlauf des Graphen, den man skizzieren soll.

2. Aufgabe

a) maximale = Hochpunkt

$f(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 3218$

$f'(x) = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8$

$f''(x) = -1{,}2x + 1{,}2$

$f'(x_E) = 0$

$0 = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8 \quad |:(-0{,}6)$

mit p-q ergibt sich $x_{E1} = 3$ und $x_{E2} = -1$

$0 = x^2 - 2x - 3$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(3) = -2{,}4 < 0 \Rightarrow H$

Max. gesucht: $f(3) = 3223{,}4$

$f''(-1) = 2{,}4 > 0 \Rightarrow T$

Am Ende von 2003 lag die maximale Bevölkerungsdichte mit 3223,4 vor.

b) $f(10) = 3096$ Im Jahr 2010 liegt die Bevölkerungsdichte bei 3096.

c) größte Änderungsrate = Wendepunkt

$f''(x) = -1{,}2x + 1{,}2$

$f'''(x) = -1{,}2$

$f''(x) = 0$

$0 = -1{,}2x + 1{,}2$

$x = 1$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow L - R - K$

Im Jahr 2001 stieg die Bevölkerungsdichte am stärksten.

d) $f(x) = 3168{,}4$

$3168{,}4 = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 3218$

$0 = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 49{,}6$

$0 = x^3 - 3x^2 - 9x - 248$

Polynomdivision oder Horner-Schema mit $x_1 = 8$ ergibt: $x^2 + 5x + 31$

p-q-Formel liefert: $x_{2/3} = \text{n.l.}$

Eine Bevölkerungsdichte von 3168,4 lag Ende des Jahres 2008 vor.

<u>3. Aufgabe</u>

a) Hier muss man erst den linken Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x) = 2{,}5x^4 - 15x^2 + 20$	$f''(x_W) = 0$	$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$
$f'(x) = 10x^3 - 30x$	$0 = 30x^2 - 30 \mid +30$	$f'''(-1) = -60 < 0 \Rightarrow L-R-K$
$f''(x) = 30x^2 - 30$	$30 = 30x^2 \mid :30 \mid \sqrt{\ }$	$f(-1) = 7{,}5$ => $W_{L-R}(-1 \mid 7{,}5)$
$f'''(x) = 60x$	$x_{W1} = 1 \notin D$ und $x_{W2} = -1$	

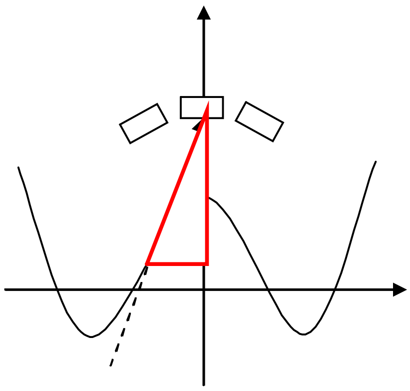
$f'(x) = m$ also $f'(-1) = 20$

$t(x) = m \cdot x + b$

Durch Einsetzen von m und W ergibt sich $b = 27{,}5$ also $t(x) = 20x + 27{,}5$.

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!
Die Funktion f(x) hat auf der y-Achse den Wert 20 und die Tangente 27,5.
$27{,}5 - 20 = 7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist die lange Seite eines rechtwinkligen Dreiecks. Die längste Seite muss mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20. (Wendepunkt $(-1 \mid 7{,}5)$ und $S_y(0 \mid 27{,}5)$ der Tangente benutzen)



$a^2 + b^2 = c^2$		$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$(-1)^2 + 20^2 = c^2$	oder	$d = \sqrt{(0+1)^2 + (27{,}5 - 7{,}5)^2}$
$401 = c^2 \mid \sqrt{\ }$		$d \approx 20{,}02$

$c \approx 20{,}02$ Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20,02 m.