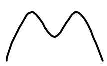
Lösungen I 16

1. Aufgabe

a)
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen	
$T(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$0 = e$
$x = 0;\ m = 0$	$f'(0) = 0$	II	$0 = d$
$P(1\|1{,}5)$	$f(1) = 1{,}5$	III	$1{,}5 = a + b + c + d + e$
$x = 1;\ m = 2{,}75$	$f'(1) = 2{,}75$	IV	$2{,}75 = 4a + 3b + 2c + d$
$S_x(-2\|0)$	$f(-2) = 0$	V	$0 = 16a - 8b + 4c - 2d + e$

b)
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f''(x) = -3x^2 + \frac{3}{2}x + 3$$
$$f'(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f'''(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$, $x \to +\infty; f(x) \to -\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|0)$

$$f(x) = 0$$
$$0 = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \,\Big|: \left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$0 = x^4 - x^3 - 6x^2$$

x^2 ausklammern ergibt $x_{1/2} = 0$ und $0 = x^2 - x - 6$

p-q-Formel liefert $x_3 = 3$ und $x_4 = -2$

$S_{x1/2}(0|0)$ $S_{x3}(3|0)$ $S_{x4}(-2|0)$

5. Extrempunkte

1. Schritt $f'(x) = 0$

$$0 = -x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x \,\Big|: (-1)$$
$$0 = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x$$

x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und $0 = x^2 - \frac{3}{4}x - 3$

p-q-Formel liefert $x_2 = 2{,}1$ und $x_3 = -1{,}4$

2. Schritt $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow T$

$f''(2{,}1) = -7{,}1 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-1{,}4) = -5 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(0) = 0$ $T(0|0)$

$f(2{,}1) = 4{,}1$ $H(2{,}1|4{,}1)$

$f(-1{,}4) = 1{,}3$ $H(-1{,}4|1{,}3)$

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x) = 0$

$$0 = -3x^2 + \frac{3}{2}x + 3 \,\Big|: (-3)$$
$$0 = x^2 - 0{,}5x - 1$$

p-q-Formel liefert $x_1 = 1{,}3$ und $x_2 = -0{,}8$

2. Schritt $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1{,}3) = -6{,}3 < 0 \Rightarrow L-R-K$

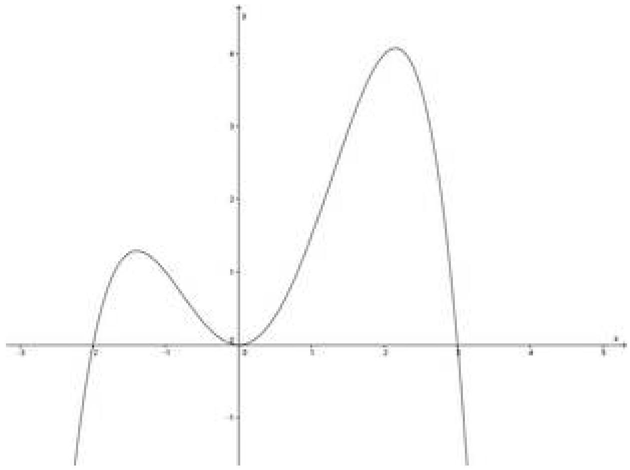
$f'''(-0{,}8) = 6{,}3 > 0 \Rightarrow R-L-K$

3. Schritt

$f(1{,}3) = 2{,}4$ $\quad W_{L-R}(1{,}3|2{,}4)$

$f(-0{,}8) = 0{,}7$ $\quad W_{R-L}(-0{,}8|0{,}7)$

7. Zeichnung



c) $T(0|0)$ Stimmt. (bereits berechnet)

$P(1|1{,}5)$ => $f(1) = 1{,}5$ Stimmt. (neu berechnet)

$P(1|1{,}5)$ mit der Steigung 2,75 => $f'(1) = 2{,}75$ Stimmt. (neu berechnet)

$S_x(-2|0)$ => $f(-2) = 0$ Stimmt. (neu berechnet)

<u>2. Aufgabe</u>

Wendepunkte

$f(x) = -x^4 + 2x^3$

$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

$f''(x) = -12x^2 + 12x$

$f'''(x) = -24x + 12$

$f''(x) = 0$

$0 = -12x^2 + 12x \,|\, :(-12)$

$0 = x^2 - x$

$0 = x(x-1)$

$x_1 = 0 \notin D \qquad x_2 = 1$

Da $x_1 = 0$ nicht zum Definitionsbereich $[0{,}5;+2]$ gehört, kann man diese Lösung weglassen.

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1) = -12 < 0 \Rightarrow L-R-K$

$f(1) = 1 \qquad W_{L-R}(1|1)$

Tangente: $t(x) = m \cdot x + b$

$f'(x) = m$

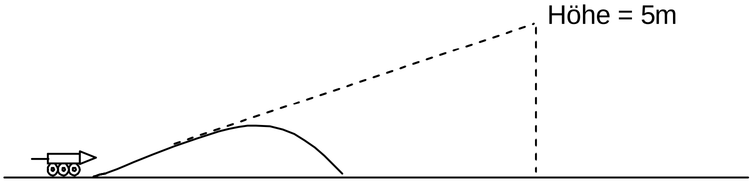
$f'(1) = 2$

einsetzen

$1 = 2 \cdot 1 + b$

$b = -1$

=> $t(x) = 2x - 1$



1 = Stelle des Abhebens $\qquad$ x = Stelle mit Höhe 5 m

Die Höhe 5m ist der y-Wert für die Tangente, also $t(x) = 5$

$5 = 2x - 1$

$x = 3$

Abstand: $3 - 1 = 2$

=> Die Rakete hat 2 m nach dem Abheben die Höhe 5 m.

<u>3. Aufgabe</u>

a) Zu Beginn = Zeitpunkt null => $x=0$ also $f(0)=38{,}4$

Der Patient hatte zu Beginn eine Temperatur von 38,4°C.

b) Temperatur am höchsten = Hochpunkt; Zeitpunkt = x-Wert

$f(x)=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+38{,}4$

$f'(x)=-0{,}4x^3+1{,}6x$

$f''(x)=-1{,}2x^2+1{,}6$

$f'(x)=0$

$0=-0{,}4x^3+1{,}6x \mid :(-0{,}4)$

$0=x^3-4x$

x ausklammern ergibt $x_1=0$ und $x^2=4$

also $x_2=2$ und $x_3=-2\notin D$ $\quad D=[0;3]$

Da der Wert -2 nicht im Definitionsbereich enthalten ist, wird er nicht weiter untersucht.

$f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$

$f''(0)=1{,}6>0 \Rightarrow T$

$f''(2)=-3{,}2<0 \Rightarrow H$

Nach zwei Tagen ist die Temperatur am höchsten.

c) stärkster Anstieg = Steigung im Wendepunkt

$f(x)=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+38{,}4$

$f'(x)=-0{,}4x^3+1{,}6x$

$f''(x)=-1{,}2x^2+1{,}6$

$f'''(x)=-2{,}4x$

$f''(x)=0$

$0=-1{,}2x^2+1{,}6 \mid :(-1{,}2)$

$0=x^2-\frac{4}{3}$

Umstellen und Wurzel ziehen ergibt $x_1=1{,}2$ und $x_2=-1{,}2\notin D$

Da der Wert -1,2 nicht im Definitionsbereich enthalten ist, wird er nicht weiter untersucht.

$f''(1{,}2)=-0{,}1<0 \Rightarrow L-R-K$

Nach 1,2 Tagen bzw. am zweiten Tag stieg die Temperatur am stärksten.

c) Temperaturangabe = y-Wert also $f(x)=37{,}5$

$37{,}5=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+38{,}4 \mid -37{,}5$

$0=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+0{,}9 \mid :(-0{,}1)$

$0=x^4-8x^2-9$

Substitution mit $x^2=z$ und p-q ergibt

$z_1=9$ und $z_2=-1$

Resubstitution mit $z=x^2$ und Wurzel ziehen führt nur zu zwei Lösungen.

$x_1=3$ und $x_2=-3\notin D$ und $x_{3/4}=$ n.l.

Da der negative x-Wert nicht im Definitionsbereich enthalten ist, bleibt nur $x_1=3$ übrig.

Der Patient hat nach drei Tagen, wieder die Temperatur von 37,5°C.

<u>4. Aufgabe</u>	<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$f(x)=ax^3+bx$	$P(1\mid 2)$	$f(1)=2$	I $\quad 2=a+b$
$f'(x)=3ax^2+b$	$x=1; m=0$	$f'(1)=0$	II $\quad 0=3a+b$

I $\quad 2=a+b \mid \cdot(-1)$ $\qquad -2=-a-b$ $\quad$ addieren $\quad -2=2a$ => $a=-1$ und einsetzen in II ergibt

II $\quad 0=3a+b$ $\qquad 0=3a+b$ $\qquad b=3$

=> $f(x)=-x^3+3x$