Lösungen H 18

1. Aufgabe

a) $f(x) = ax^3 + bx$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$(1\|2)$	$f(1) = 2$	I $a + b = 2$
$x = 1;\ m = 0$	$f'(1) = 0$	II $3a + b = 0$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man: $a = -1$ und $b = 3$.

$f(x) = -1x^3 + 3x$

b) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$(0\|0)$	$f(0) = 0$	I $c = 0$
$H(-1\|5)$	$f(-1) = 5$	II $a + b + c = 5$
$x = -1;\ m = 0$	$f'(-1) = 0$	III $-4a - 2b = 0$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man: $a = -5$ und $b = 10$.

$f(x) = -5x^4 + 10x^2$

2. Aufgabe

a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

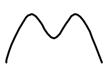
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$(0\|0)$	$f(0) = 0$	I $e = 0$
$x = 0;\ m = 0$	$f'(0) = 0$	II $d = 0$
$(1\|1{,}5)$	$f(1) = 1{,}5$	III $a + b + c + d + e = 1{,}5$
$x = 1;\ m = 2{,}75$	$f'(1) = 2{,}75$	IV $4a + 3b + 2c + d = 2{,}75$
$(-2\|0)$	$f(-2) = 0$	V $16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ oder $f(x) = -0{,}25x^4 + 0{,}25x^3 + 1{,}5x^2$

1. Definitionsbereich:
$D = \mathbb{R}$

2. Globalverlauf:
$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$



3. Symmetrie:
keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -0{,}25x^4 + 0{,}25x^3 + 1{,}5x^2 \quad | : (-0{,}25)$

$0 = x^4 - x^3 - 6x^2$

$0 = x^2(x^2 - x - 6)$ Ausklammern von x^2 ergibt $x_{N1/2} = 0$

$0 = x^2 - x - 6$

$x_{N3/4} = +0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 6}$

$x_{N3} = 3$ und $x_{N4} = -2$

$S_{x1/2}(0|0)$ $S_{x3}(3|0)$ $S_{x4}(-2|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = -x^3 + 0{,}75x^2 + 3x$

$f''(x) = -3x^2 + 1{,}5x + 3$

$f'''(x) = -6x + 1{,}5$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -x^3 + 0{,}75x^2 + 3x \,|: (-1)$

$0 = x^3 - 0{,}75x^2 - 3x$

$0 = x(x^2 - 0{,}75x - 3)$ Ausklammern von x ergibt $x_{E1} = 0$

$0 = x^2 - 0{,}75x - 3$

$x_{E2/3} = +\frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 3}$

$x_{E2} \approx 2{,}15$ und $x_{E3} \approx -1{,}40$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$	3. Schritt	
$f''(0) = 3 > 0$ => Tiefpunkt	$f(0) = 0$	$T(0|0)$
$f''(2{,}15) \approx -7{,}64 < 0$ => Hochpunkt	$f(2{,}15) \approx 4{,}08$	$H(2{,}15|4{,}08)$
$f''(-1{,}40) = -4{,}98 < 0$ => Hochpunkt	$f(-1{,}40) \approx 1{,}29$	$H(-1{,}40|1{,}29)$

Monotonie:

$M_1 =]-\infty; -1{,}40]$ monoton steigend

$M_2 = [-1{,}40; 0]$ monoton fallend

$M_3 = [0; 2{,}15]$ monoton steigend

$M_4 = [2{,}15; +\infty[$ monoton fallend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -3x^2 + 1{,}5x + 3 \,|: (-3)$

$0 = x^2 - 0{,}5x - 1$

$x_{W1/2} = +0{,}25 \pm \sqrt{0{,}25^2 + 1}$

$x_{W1} \approx 1{,}28$ und $x_{W2} \approx -0{,}78$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(1{,}28) = -6{,}18 < 0 \Rightarrow L - R - K$

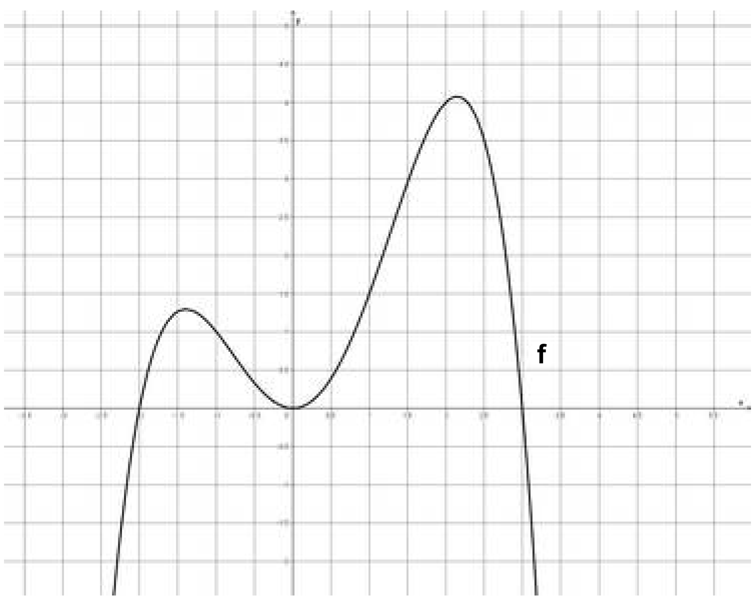
$f'''(-0{,}78) = 6{,}18 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(1{,}28) \approx 2{,}31$ $W_{L-R}(1{,}28|2{,}31)$

$f(-0{,}78) \approx 0{,}70$ $W_{R-L}(-0{,}78|0{,}70)$

7. Zeichnung



3. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 1{,}5x^3 - 6x^2 + 9x$ Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$f'(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = -1{,}5x^2 + 9x - 12$

$f'''(x) = -3x + 9$

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -1{,}5x^2 + 9x - 12 \,|: (-1{,}5)$

$0 = x^2 - 6x + 8$

$x_{W1/2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$

$x_{W1} = 4$ und $x_{W2} = 2$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(4) = -3 < 0 \Rightarrow L-R-K$

$f'''(2) = 3 > 0 \Rightarrow R-L-K$

3. Schritt

$f(4) = 4$ $W_{L-R}(4|4)$

$f(2) = 4$ $W_{R-L}(2|4)$

$t(x) = m \cdot x + b$ und $f'(x) = m$

$W_{L-R}(4\|4)$	$W_{R-L}(2\|4)$
$f'(4) = 1$	$f'(2) = -1$
$4 = 1 \cdot 4 + b$	$4 = (-1) \cdot 2 + b$
$b = 0$	$b = 6$
$t(x_{W1}) = x$	$t(x_{W2}) = -x + 6$

b) $t(x_{W1}) = t(x_{W2})$

$x = -x + 6$

$2x = 6$

$x = 3$

$t(3) = 3$ $S(3|3)$

c) 1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 9 \,|: (-0{,}5)$

$0 = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_{E1} = 3$ ergibt

$0 = x^2 - 6x + 6$

$x_{E2/3} = 3 \pm \sqrt{9-6}$

$x_{E1} \approx 4{,}73$ und $x_{E1} \approx 1{,}27$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(3) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow T$

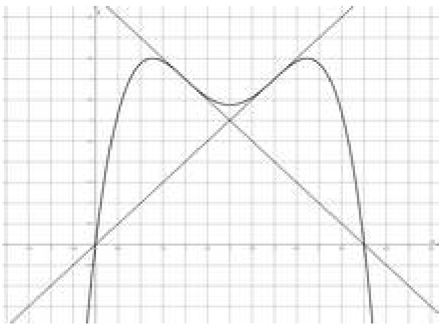
$f''(4{,}73) = -2{,}99 < 0 \Rightarrow H$

$f''(1{,}27) = -2{,}99 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(3) = 3{,}375$ $T(3|3{,}375)$

Nein, der Schnittpunkt S stimmt nicht mit dem Tiefpunkt der Funktion f(x) überein.



(*Zeichnung nur zur Verdeutlichung)*

4. Aufgabe

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$

1. Definitionsbereich:

$D = R$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. Symmetrie:

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|4)$

$f(x_N) = 0$ Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_{N1} = -2$

$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \Big| : \left(\frac{1}{8}\right)$ ergibt $x^2 - 8x + 16 = 0$

$0 = x^3 - 6x^2 + 32$ p-q-Formel $x_{N2/3} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16}$

$x_{N2/3} = 4$

$S_{x1}(-2|0)$ $S_{x2/3}(4|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$

$f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

$f'''(x) = \frac{3}{4}$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x \Big| : \frac{3}{8}$

$0 = x^2 - 4x$

$0 = x(x-4)$ Ausklammern von x ergibt

$x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = 4$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ 3. Schritt

$f''(0) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow H$ $f(0) = 4$ $H(0|4)$

$f''(4) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow T$ $f(4) = 0$ $T(4|0)$

Monotonie:

$M_1 = \left]-\infty;0\right]$ monoton steigend

$M_2 = [0;4]$ monoton fallend

$M_3 = \left[4;+\infty\right[$ monoton steigend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \Big| + \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x \Big| : \frac{3}{4}$

$x_W = 2$

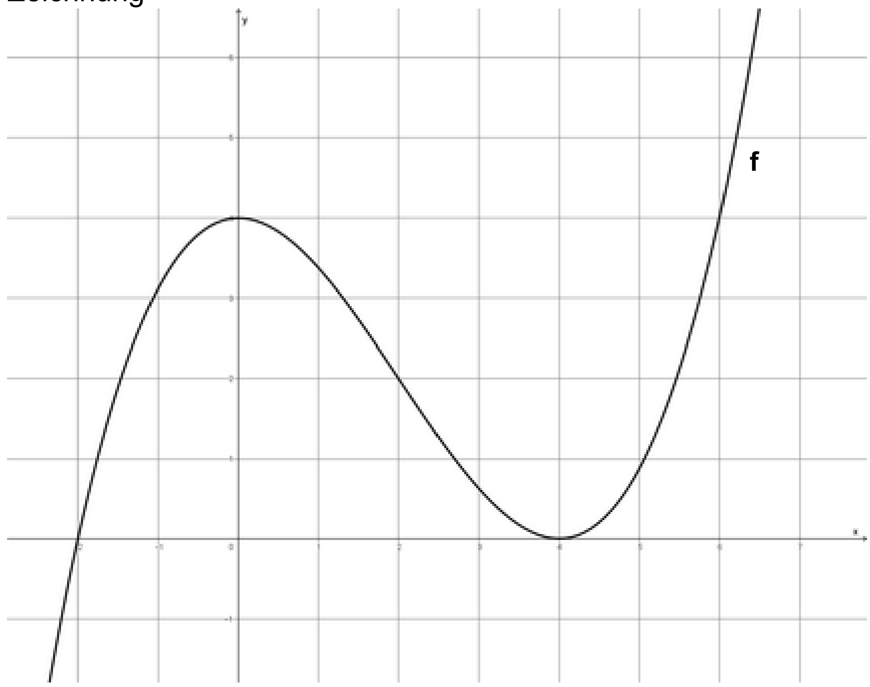
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(2) = 0{,}75 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(2) = 2$ $\qquad\qquad\qquad W_{R-L}(2|2)$

7. Zeichnung



b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

1. Definitionsbereich:

$D = R$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. Symmetrie:

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big| : \left(\frac{2}{3}\right)$

$0 = x^3 + 3x^2$

$0 = x^2(x+3)$ $\qquad\qquad$ Ausklammern von x^2 ergibt $x_{N1/2} = 0$

$x_3 = -3$

$S_{x1/2}(0|0) \quad S_{x2}(-3|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = 2x^2 + 4x$

$f''(x) = 4x + 4$

$f'''(x) = 4$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = 2x^2 + 4x \,|: 2$

$0 = x^2 + 2x$

$0 = x(x+2)$ Ausklammern von x ergibt

$x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = -2$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(0) = 4 < 0 \Rightarrow T$

$f''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(0) = 0$ $T(0|0)$

$f(-2) = \frac{8}{3}$ $H(-2|2{,}67)$

Monotonie:

$M_1 =]-\infty;-2]$ monoton steigend

$M_2 = [-2;0]$ monoton fallend

$M_3 = [0;+\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 4x + 4 \,|-4x$

$-4x = 4 \,|: (-4)$

$x_W = -1$

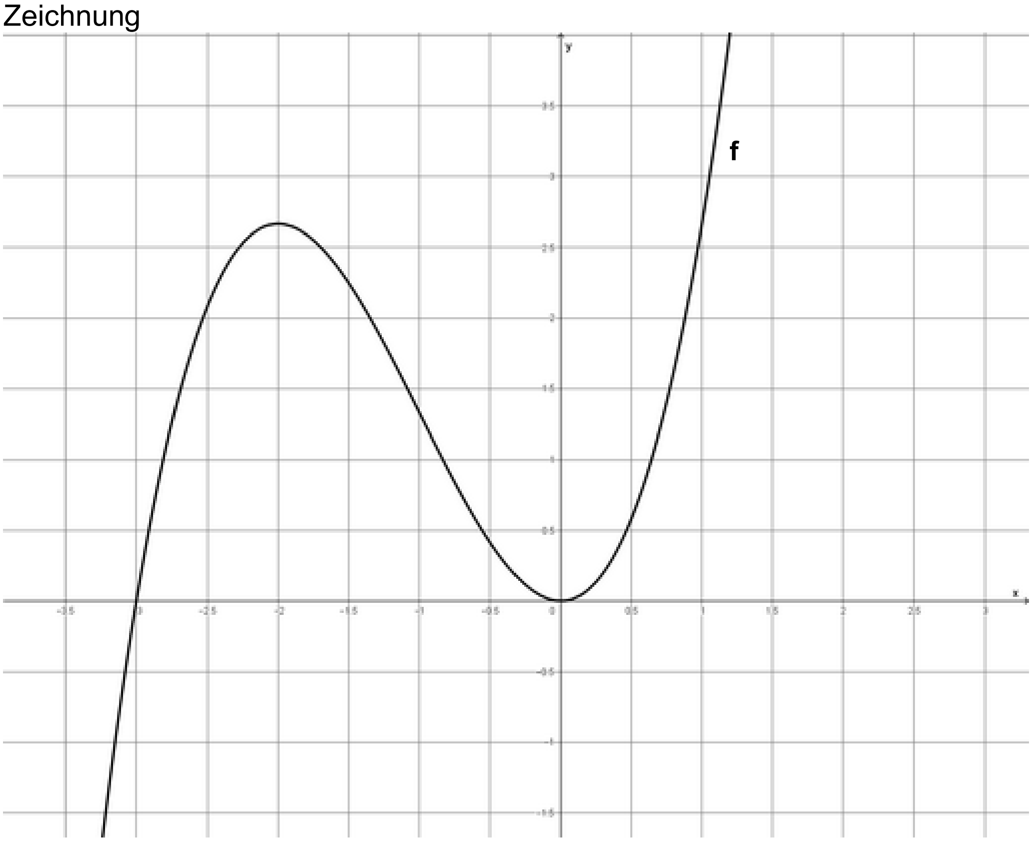
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow R-L-K$

3. Schritt

$f(-1) = \frac{4}{3}$ $W_{R-L}(-1|1{,}33)$

7. Zeichnung



c) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$

1. Definitionsbereich:

$D = \mathbb{R}$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. Symmetrie:

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-4)$

$f(x_N) = 0$ Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_{N1} = 2$

$0 = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 6x - 4 \,|: 0{,}5$ ergibt $x^2 - 4x + 4 = 0$

$0 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ p-q-Formel $x_{N2/3} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$

$x_{N2/3} = 2$

$S_{x1/2/3}(2|0)$ *dreifache Nullstelle ist Sattelpunkt*

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 6$

$f''(x) = 3x - 6$

$f'''(x) = 3$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = 1{,}5x^2 - 6x + 6 \,|: 1{,}5$

$0 = x^2 - 4x + 4$

$x_{E1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$

$x_{E1/2} = 2$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(2) = 0 \Rightarrow$ kein Extrempunkt => Sattelpunkt

Monotonie:

$M_1 = \left]-\infty; +\infty\right[$ monoton steigend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 3x - 6$

$x_W = 2$

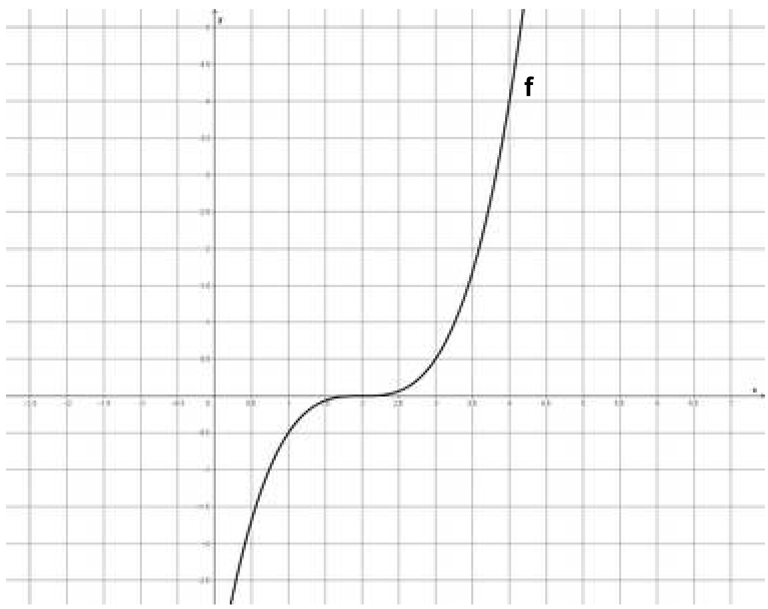
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(2) = 3 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(2) = 0$ $W_{R-L}(2|0)$ Sattelpunkt

7. Zeichnung



d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

1. Definitionsbereich:
$D = R$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. Symmetrie:
keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \Big| : \frac{1}{4}$

$0 = x^4 + \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

$0 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{3}x + 8\right)$ Ausklammern von x^2 ergibt $x_{N1/2} = 0$

$0 = x^2 + \frac{16}{3}x + 8$

$x_{N3/4} = -\frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 8}$

$x_{N3/4} = \text{n.l.}$

$S_{x1/2}(0|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

$f''(x) = 3x^2 + 8x + 4$

$f'''(x) = 6x + 8$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = x^3 + 4x^2 + 4x$

$0 = x(x^2 + 4x + 4)$ Ausklammern von x ergibt $x_{E1} = 0$

$0 = x^2 + 4x + 4$

$x_{E2/3} = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}$

$x_{E2/3} = -2$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$

$f''(-2) = 0 \Rightarrow$ kein Extrempunkt => Sattelpunkt

3. Schritt

$f(0) = 0$ $T(0|0)$

Monotonie:

$M_1 =]-\infty;0]$ monoton fallend

$M_2 = [0;+\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 3x^2 + 8x + 4 \,|\, : 3$

$$0 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$x_{W1/2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}}$$

$$x_{W1} = -\frac{2}{3} \text{ und } x_{W2} = -2$$

2. Schritt $\quad f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow R - L - K$$

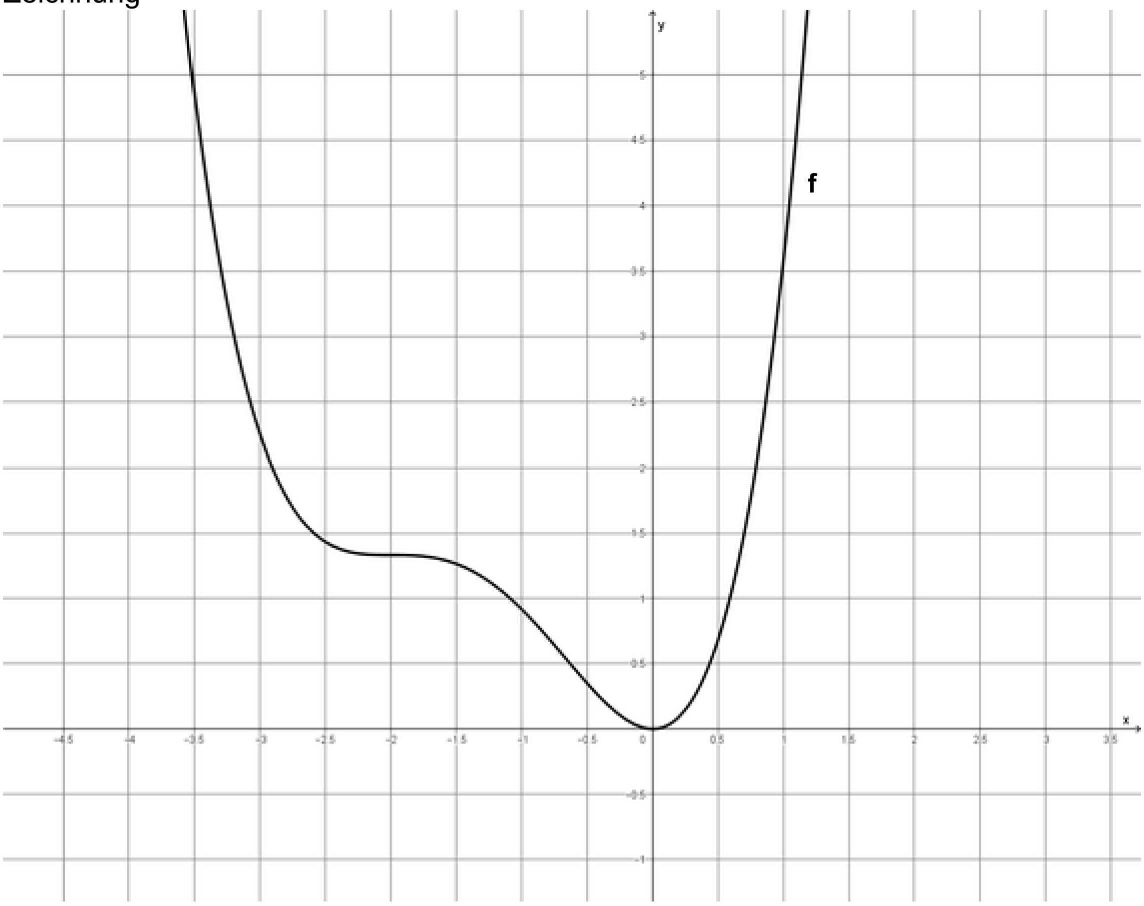
$$f'''(-2) = -4 < 0 \Rightarrow L - R - K$$

3. Schritt

$f\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}54 \qquad W_{R-L}\left(-0{,}67 \middle| 0{,}54\right)$

$f(-2) \approx 1{,}33 \qquad W_{L-R}\left(-2 \middle| 1{,}33\right)$ Sattelpunkt

7. Zeichnung



5. Aufgabe

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

1. Definitionsbereich:

$D = \mathbb{R}$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. Symmetrie:

keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f'''(x) = 6$

Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 6x - 6$

$x_W = 1$

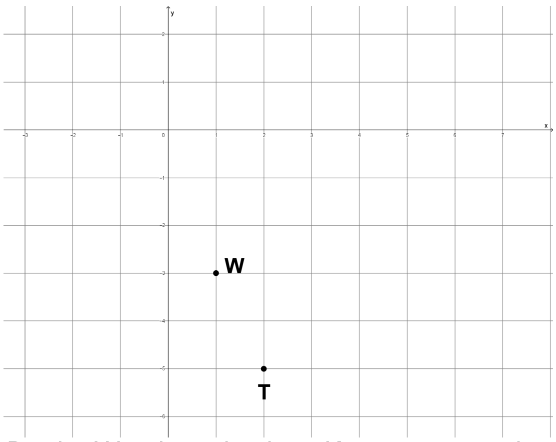
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(1) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$

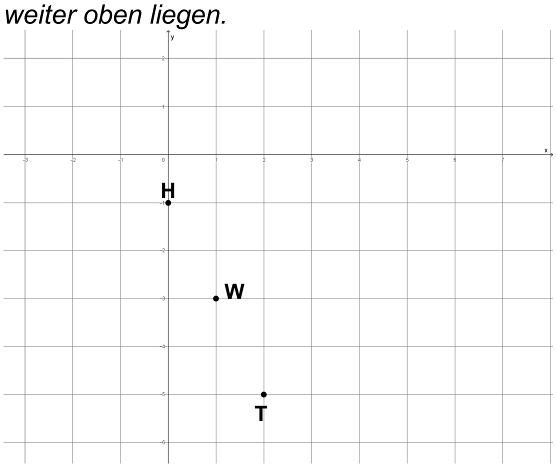
3. Schritt

$f(1) = -3$ $W_{R-L}(1|-3)$

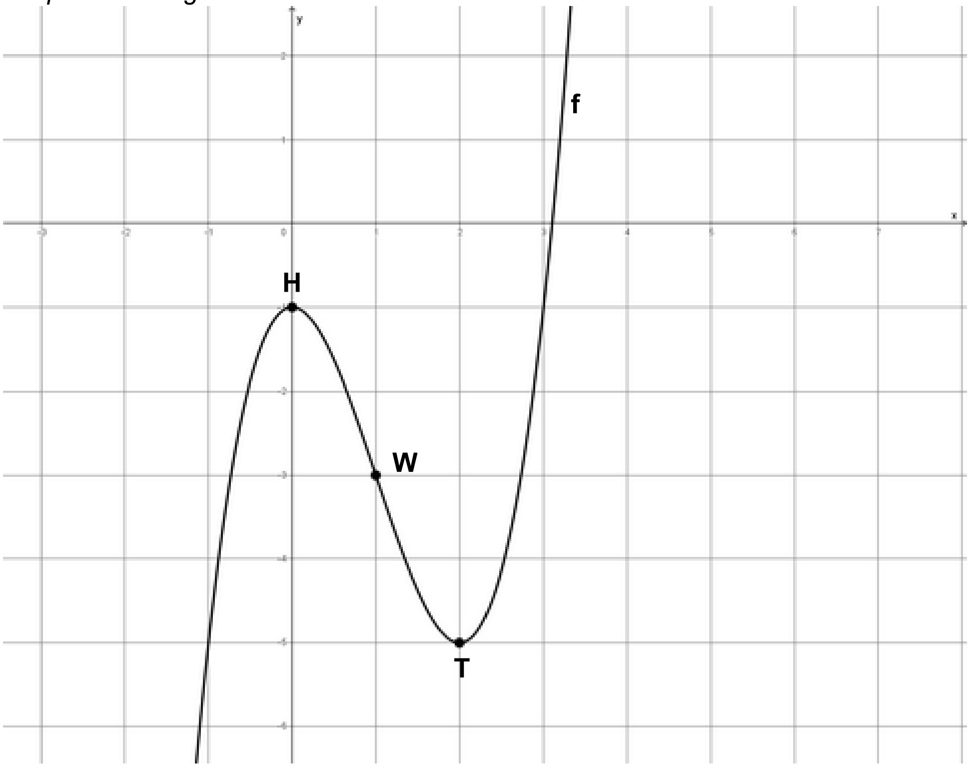
c) Zuerst zeichnet man beide Punkte in ein Koordinatensystem.



Da der Wendepunkt einen Krümmungswechsel von rechtsgekrümmt (Hochpunkt) nach linksgekrümmt (Tiefpunkt) besitzt, muss sich der Hochpunkt links vom Wendepunkt befinden. Bei einer Funktion 3. Grades liegt der ***Wendepunkt in der Mitte zwischen Hoch- und Tiefpunkt****. Da der Tiefpunkt eine Einheit weiter rechts und zwei Einheiten weiter unten liegt als der Wendepunkt, muss der Hochpunkt eine Einheit links vom Wendepunkt und zwei Einheiten weiter oben liegen.*



Unter Berücksichtigung des Globalverlaufs und der Symmetrieaussage ergibt sich daraus der Graph f. Die Lage der Nullstelle muss man frei Hand zeichnen.



b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

1. Definitionsbereich:

$D = R$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$

3. Symmetrie:

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-2)$

$f(x_N) = 0$ Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_{N1} = 1$

$0 = -x^3 + 3x - 2 |:(-1)$ ergibt $x^2 + x - 2 = 0$

$0 = x^3 - 3x + 2$ p-q-Formel $x_{2/3} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 2}$

$x_{N2} = 1$ und $x_{N3} = -2$

$S_{x1/2}(1|0)$ $S_{x3}(-2|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$f''(x) = -6x$

$f'''(x) = -6$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -3x^2 + 3 | + 3x^2$

$3x^2 = 3 |: 3$

$x^2 = 1 | \sqrt{\ }$

$x_{E1} = 1$ und $x_{E2} = -1$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(1) = -6 < 0$ => Hochpunkt

$f''(-1) = 6 > 0$ => Tiefpunkt

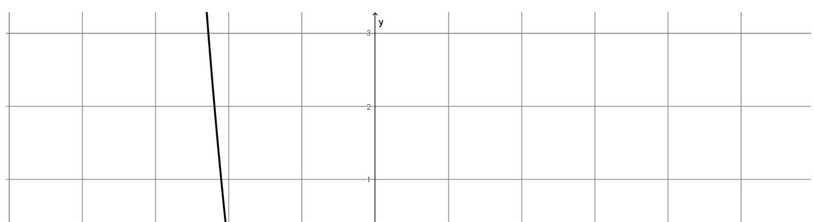
3. Schritt

$f(1) = 0$ $H(1|0)$

$f(-1) = -4$ $T(-1|-4)$

Monotonie:

$M_1 =]-\infty; -1]$ monoton fallend



$M_2 = [-1;+1]$ monoton steigend
$M_4 = [+1;+\infty[$ monoton fallend

f

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -6x \,|\, : (-6)$

$x_W = 0$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(0) - 6 < 0 \Rightarrow L - R - K$

3. Schritt

$f(0) = -2 \quad W_{L-R}(0|-2)$

7. Zeichnung

c) kleinste Nullstelle von f(x) ist $S_{x3}(-2|0)$, Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|-2)$

Möglichkeit I

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{0+2} = -1$

$g(x) = m \cdot x + b$

$-2 = -1 \cdot 0 + b$

$b = -2$

$g(x) = -x - 2$

Möglichkeit II

$g(x) = ax + b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S_{x3}(-2\|0)$	$g(-2) = 0$	I $\quad -2a + b = 0$
$S_y(0\|-2)$	$g(0) = -2$	II $\quad b = -2$

b einsetzen in I ergibt $a = -1$ => $g(x) = -x - 2$

d) Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$W_{L-R}(0|-2)$ aus Kurvendiskussion

$f'(x) = m$ mit $f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(0) = 3$ Steigung

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = 3 \cdot 0 + b$

$b = -2 \qquad t(x) = 3x - 2$

<u>5. Aufgabe</u>

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

$f''(x_W) = 0$

$0 = 6x - 12$

$x_W = 2$

$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(2) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f(2) = -1 \qquad W_{R-L}(2|-1)$

$f'(x) = m$ mit $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

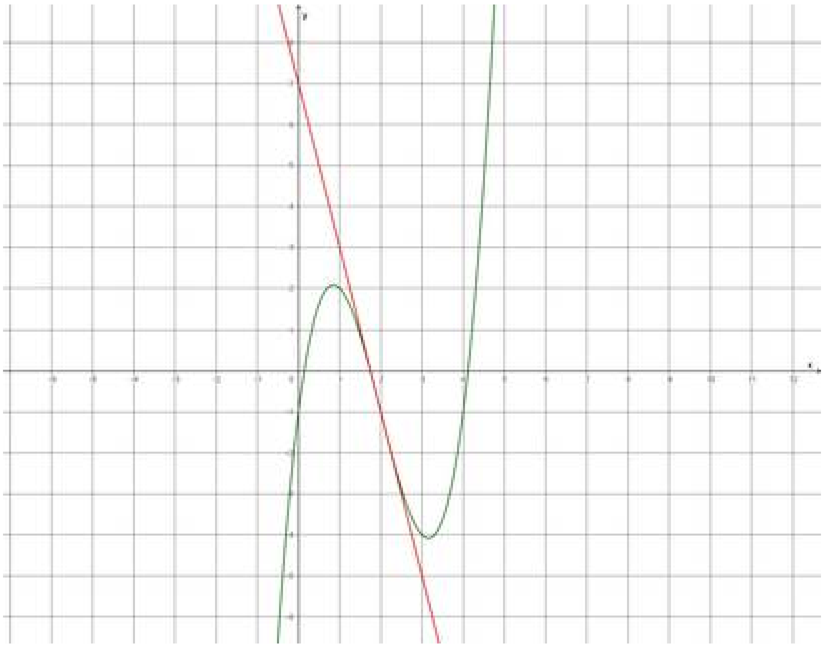
$f'(2) = -4$ Steigung

$t(x) = m \cdot x + b$

$-1 = 2 \cdot (-4) + b$

$b = 7 \qquad t(x) = -4x + 7$

Zeichnung nur zur Verdeutlichung



Bei einer Funktion 3. Grades berührt die Wendetangente die Kurve im Wendepunkt und schneidet sie dort auch. Berechnet man auch die gemeinsamen Schnittpunkte, so erhält man immer einen dreifachen Schnittpunkt von der Wendetangenten mit der Funktion 3. Grades.