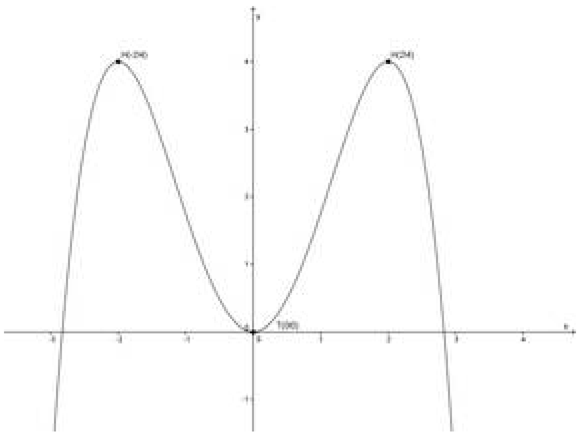
Lösungen H 16

<u>1. Aufgabe</u>

Zuerst sollte man sich eine Zeichnung anfertigen, aus der man die Antworten ablesen kann.



a) Die Funktion ist 4. Grades, da der Graph die Form eines „M“ hat und genau drei Extrempunkte vorhanden sind.

b) Aus der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Graph von unten kommt und nach unten geht.
$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$

c) Der Graph der Funktion ist achsen-symmetrisch, da die beiden Hochpunkte spiegelgleich liegen, der Tiefpunkt sich auf der y-Achse befindet und kein weiterer Extrempunkt genannt wird.

d) Man kann in der Zeichnung sehen, dass der Graph 3 Nullstellen besitzt.

e) Die beiden äußeren Nullstellen sind einfache Nullstellen, der Graph schneidet die x-Achse. Die mittlere Nullstelle ist eine doppelte Nullstelle und somit eine Berührstelle. Hier liegt ein Extrempunkt – in diesem Fall ein Tiefpunkt – vor.

f) Die Funktionsgleichung lautet in allgemeiner Form: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.
Wegen des Verlaufs kann man über a aussagen, dass der Wert negativ ist.
Wegen der drei Extrempunkte kann man über b aussagen, dass dieser Wert vorhanden sein muss, da sonst der Graph ähnlich aussehen würde wie eine Parabel 2. Grades.
Das der Graph durch den Ursprung verläuft, muss c = 0 sein.
Die Funktionsgleichung reduziert sich auf: $f(x) = ax^4 + bx^2$.

Für Interessierte hier die Berechnung:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>		
$T(0\vert 0)$	$f(0) = 0$	I	$0 = c$	
$H(2\vert 4)$	$f(2) = 4$	II	$4 = 16a + 4b + c$	c einsetzen ergibt
$x = 2$; $m = 0$	$f'(2) = 0$	III	$0 = 32a + 4b$	

II $4 = 16a + 4b \,|\cdot(-1)$ $\quad -4 = -16a - 4b$

III $0 = 32a + 4b$ $\quad 0 = 32a + 4b$ addieren ergibt $-4 = 16a$ =>

$a = -\frac{1}{4}$ und durch einsetzen von a ergibt sich b mit $b = 2$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$$

2. Aufgabe

a) $f(0) = 90$ Am Anfang waren es 90 Kaninchen.

b) Hier sind Hoch- und Tiefpunkt gesucht.

$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 90$

$f'(x) = -6x^2 + 36x - 30$

$f''(x) = -12x + 36$

$f'(x) = 0$

$0 = -6x^2 + 36x - 30 \,|: (-6)$

$0 = x^2 - 6x + 5$

mit p-q ergibt sich $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(5) = -24 < 0 \Rightarrow H$ $f(5) = 140$ $H(5|140)$

$f''(1) = 24 > 0 \Rightarrow T$ $f(1) = 76$ $T(1|76)$

Nach 5 Jahren war die Population am größten mit 140 Kaninchen, nach einem Jahr am kleinsten mit 76 Kaninchen.

c) $f(x) = 130$

$130 = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 90 \,|-130$

$0 = -2x^3 + 18x^2 - 30x - 40 \,|: (-2)$

$0 = x^3 - 9x^2 + 15x + 20$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ ergibt $0 = x^2 - 5x - 5$

p-q-Formel liefert $x_2 = 5{,}9$ und $x_3 = -0{,}9 \notin D$

(Die Zahl -0,9 liegt vor dem Ausbruch, ist somit nicht im Definitionsbereich vorhanden und wird nicht weiter beachtet.)

Nach 4 und nach 5,9 Jahren (im sechsten Jahr) befanden sich 130 Kaninchen im Volk.

d) größte Wachstumsrate = Steigung im Wendepunkt

$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 90$

$f'(x) = -6x^2 + 36x - 30$

$f''(x) = -12x + 36$

$f'''(x) = -12$

$f''(x) = 0$

$0 = -12x + 36$

$x = 3$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(3) = -12 < 0 \Rightarrow L - R - K$

$f(3) = 108$ $W_{L-R}(3|108)$

$f'(x) = m$

$f'(3) = 24$

Die größte positive Wachstumsrate gibt es nach 3 Jahren und beträgt 24 Kaninchen pro Jahr. Zu diesem Zeitpunkt sind 108 Kaninchen vorhanden.

e) $f'(x) = m$

$f'(1{,}5) = 10{,}5$

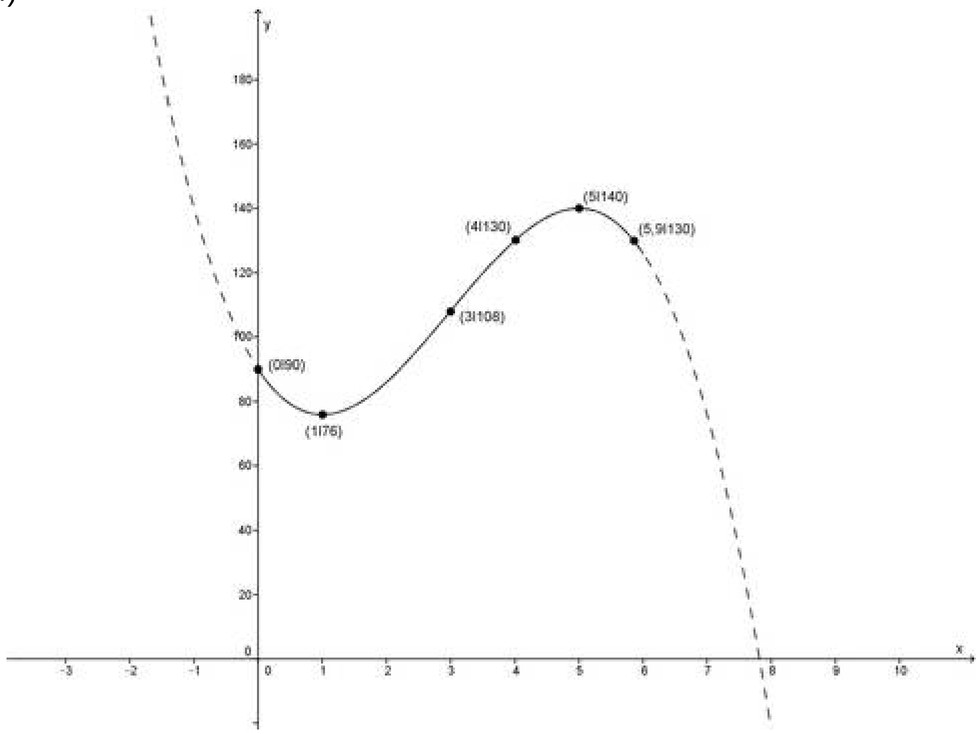
$f'(x) = m$

$10{,}5 = -6x^2 + 36x - 30$

Umformen und p-q-Formel ergibt: $x_1 = 4{,}5$ und $x_2 = 1{,}5$

Nach 1,5 Jahren beträgt die Wachstumsrate 10,5 Kaninchen pro Jahr. Diese liegt wieder nach 4,5 Jahren vor.

f)



Der durchgezogene Teil kann mithilfe der berechneten Werte gezeichnet werden. Der gestrichelte Teil ist der weitere Verlauf des Graphen, den man skizzieren soll.

<u>3. Aufgabe</u>

a) Hier muss man erst den linken Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x) = 2{,}5x^4 - 15x^2 + 32{,}5$	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'(x) = 10x^3 - 30x$	$0 = 30x^2 - 30 \mid + 30$	$f'''(-1) = -60 < 0 \Rightarrow L-R-K$
$f''(x) = 30x^2 - 30$	$30 = 30x^2 \mid : 30 \mid \sqrt{\ }$	$f(-1) = 20$ => $W_{L-R}(-1 \mid 20)$
$f'''(x) = 60x$	$x_1 = 1 \notin D$ und $x_2 = -1$	

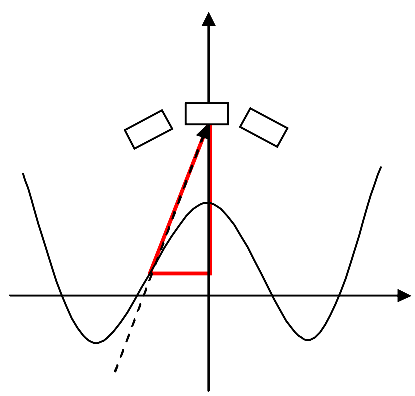
$f'(x) = m$ also $f'(-1) = 20$

$t(x) = m \cdot x + b$

Durch Einsetzen ergibt sich $b = 40$ also $t(x) = 20x + 40$.

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!
Die Funktion f(x) hat auf der y-Achse den Wert 32,5 und die Tangente 40.
$40 - 32{,}5 = 7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist die lange Seite eines rechtwinkligen Dreiecks. Die längste Seite muss mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20. (Wendepunkt $(-1 \mid 20)$ und $S_y(0 \mid 40)$ der Tangente benutzen)



$a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 20^2 = c^2$

$401 = c^2 \mid \sqrt{\ }$

$20 = c$ Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20m.