Lösungen H 13

1. Aufgabe

1. Verlauf der Funktion 2. Symmetrie 3. S_x / S_y 4. Extrempunkte 5. Wendepunkte 6. Zeichnung

$f(x) = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$

$f'(x) = 0{,}2x^3 - 2x$

$f''(x) = 0{,}6x^2 - 2$

$f'''(x) = 1{,}2x$

Zuerst die Ableitungen bilden!

1. $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty;\ f(x) \to +\infty$

2. AS **3.** $S_y(0|3{,}2)$ und für S_x $f(x) = 0$ =>

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2 \quad |: 0{,}05$

$0 = x^4 - 20x^2 + 64$

Substitution mit $x^2 = z$ also $0 = z^2 - 20z + 64$

Lösen mit p-q liefert $z_1 = 16$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = x^2$ => $x^2 = 16$ und $x^2 = 4$

Wurzel ziehen ergibt: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$ $x_3 = 2$ $x_4 = -2$

$S_{x1}(4|0)$ $S_{x2}(-4|0)$ $S_{x3}(2|0)$ $S_{x4}(-2|0)$

4. Extrempunkte $f'(x) = 0 \ \wedge\ f''(x) \neq 0$

1. Schritt

$0 = 0{,}2x^3 - 2x \quad |: 0{,}2$

$0 = x^3 - 10x$

x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und

$0 = x^2 - 10 \quad |+10$

$10 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}2$ $x_3 = -3{,}2$

2. Schritt

$f''(0) = -2 < 0$ => Hochpunkt

$f''(3{,}2) = 4{,}1 > 0$ => Tiefpunkt

$f''(-3{,}2) = 4{,}1 > 0$ => Tiefpunkt

3. Schritt

$f(0) = 3{,}2$ $H(0|3{,}2)$

$f(3{,}2) = -1{,}8$ $T(3{,}2|-1{,}8)$

$f(-3{,}2) = -1{,}8$ $T(-3{,}2|-1{,}8)$

5. Wendepunkte $f''(x) = 0 \ \wedge\ f'''(x) \neq 0$

1. Schritt

$0 = 0{,}6x^2 - 2 \quad |: 0{,}6$

$0 = x^2 - \frac{10}{3} \quad \Big| + \frac{10}{3}$

$\frac{10}{3} = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = 1{,}8 \ \vee\ x_2 = -1{,}8$

2. Schritt

$f'''(1{,}8) = 2{,}2 > 0$ $R-L-K$

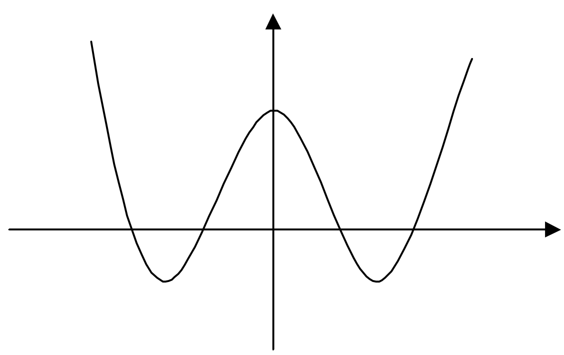
$f'''(-1{,}8) = -2{,}2 < 0$ $L-R-K$

3. Schritt

$f(1{,}8) = 0{,}5$ $W_{R-L}(1{,}8|0{,}5)$

$f(-1{,}8) = 0{,}5$ $W_{L-R}(-1{,}8|0{,}5)$

6. Zeichnung



2. Aufgabe

a) $f(x)=x^3-6x+9$ $\quad f'(x)=m \quad m=-3$

$f'(x)=3x^2-6$

$-3=3x^2-6 \quad |+6$

$3=3x^2 \quad |:3$ $\quad x_1=1 \lor x_2=-1$

$1=x^2 \quad |\sqrt{\ }$

b) $f(x)=0$

$0=x^3+0x^2-6x+9$ Polynomdivision mit $x_1=-3$ ergibt $0=x^2-3x+3$; bei p-q entsteht unter der Wurzel eine negative Zahl, also keine weiteren Nullstellen

$f'(-3)=21$

c) $m=21 \quad S_x(-3|0)$

$t(x)=m\cdot x+b$

$0=21\cdot(-3)+b$

$b=63$ $\quad t(x)=21x+63$

d) $t(x)=f(x)$

$21x+63=x^3-6x+9 \quad |-21x-63$

$0=x^3+0x^2-27x-54$

Polynomdivision mit $x_1=-3$ ergibt $0=x^2-3x-18$

p-q liefert $x_2=6$ und $x_3=-3$

Die Stelle -3 ist doppelte Lösung, da Tangentenstelle. => $f(6)=189$ also $S_3(6|189)$

3. Aufgabe

a) $t(x)=f(x)$

$39x+22=2x^3-12x^2+9x+6 \quad |-39x-22$

$0=2x^3-12x^2-30x-16 \quad |:2$ $\quad$ Polynomdivision mit $x_1=-1$ ergibt $0=x^2-7x-8$

$0=x^3-6x^2-15x-8$

p-q liefert $x_2=8$ und $x_3=-1$

Da hier der Punkt gesucht wird, an dem die Tangente anliegt, muss man die doppelte Lösung benutzen. => $f(-1)=-17$ also $S_{1/2}(-1|-17)$

b) Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$f(x)=2x^3-12x^2+9x+6$

$f'(x)=6x^2-24x+9$

$f''(x)=0 \land f'''(x)\neq 0$ $\quad f''(x)=12x-24$

$f'''(x)=12$

1. Schritt

$0 = 12x - 24 \quad +24$

$24 = 12x \quad |:12$

$2 = x$

2. Schritt

$f'''(2) = 12 > 0 \qquad R-L-K$

3. Schritt

$f(2) = -8 \qquad W_{R-L}(2|-8)$

$f'(x) = m$ also $f'(2) = -15$ einsetzen in t(x) ergibt $b = 22$ => $t(x) = -15x + 22$

c) $g(x) = f(x)$

$-x + 6 = 2x^3 - 12x^2 + 9x + 6 \quad |+x-6$

$0 = 2x^3 - 12x^2 + 10x \quad |:2$

$0 = x^3 - 6x^2 + 5x$

x ausklammern ergibt $x_1 = 0$ p-q mit $0 = x^2 - 6x + 5$

führt zu $x_2 = 5$ und $x_3 = 1$

Da hier alle Schnittpunkte gesucht sind, müssen auch alle y-Werte berechnet werden.

$f(0) = 6 \quad f(5) = 1 \quad f(1) = 5 \qquad S_1(0|6) \quad S_2(5|1) \quad S_3(1|5)$

4. Aufgabe

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 2x^2 + 4x$

$f''(x) = 4x + 4$

$f'''(x) = 4$

$R-L-K$

$f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = 4x + 4$

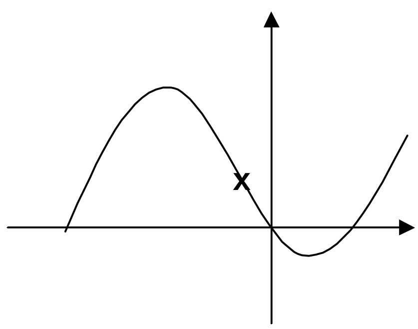
$x = -1$

$f'''(-1) = 4 > 0$

$f(-1) = \frac{4}{3}$

$W_{R-L}(1|1{,}3)$

Da der Wendepunkt eine Rechts-Links-Krümmung aufweist, liegt vor dem Wendepunkt ein Hochpunkt (Rechtskrümmung) und danach ein Tiefpunkt (Linkskrümmung). Somit zeichnet man den Wendepunkt ein und hat den ungefähren Verlauf der Funktion.



5. Aufgabe

a) Hier muss man erst den Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x) = 2{,}5x^4 - 15x^2 + 32{,}5$

$f'(x) = 10x^3 - 30x$

$f''(x) = 30x^2 - 30$

$f'''(x) = 60x$

$f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

1. Schritt 2. Schritt 3. Schritt

$0 = 30x^2 - 30 \quad |: 30$

$0 = x^2 - 1 \quad |+1$ $\qquad f'''(-1) = -60 < 0 \quad L - R - K \qquad f(-1) = 20 \quad W_{L-R}(-1|20)$

$1 = x^2 \quad |\sqrt{}$

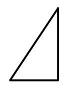
$x_1 = 1 \;\vee\; x_2 = -1$ Der erste Wendepunkt ist bei x = -1, also kann man x = +1 weglassen.

$t(x) = m \cdot x + b$

$f'(x) = m \qquad f'(-1) = 20$ Durch Einsetzen ergibt sich $b = 40$ also $t(x) = 20x + 40$

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!

$40 - 32{,}5 = 7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks.
Hier muss diese längste Seite mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20. (Wendepunkt (-1l20) und S_y(0l40) der Tangente benutzen.)

$a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 20^2 = c^2$

$401 = c^2 \quad | \sqrt{}$

$20 = c$

Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20m.