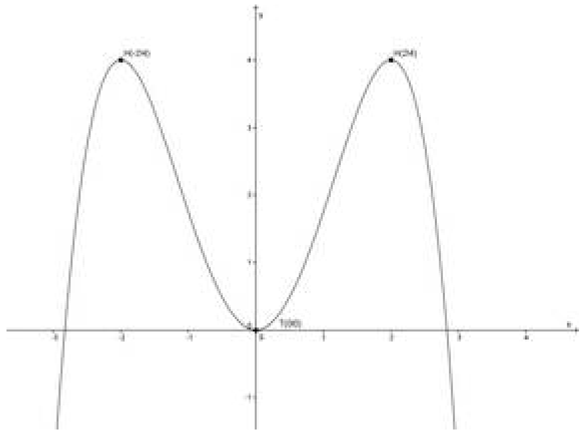
Lösungen G 18

<u>1. Aufgabe</u>
Zuerst sollte man sich eine Zeichnung anfertigen, aus der man die Antworten ablesen kann.



a) Die Funktion ist 4. Grades, da der Graph die Form eines „M“ hat und genau drei Extrempunkte vorhanden sind.

b) Aus der Zeichnung kann man entnehmen, dass der Graph von unten kommt und nach unten geht.
$x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$

c) Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch, da die beiden Hochpunkte spiegelgleich liegen, der Tiefpunkt sich auf der y-Achse befindet und kein weiterer Extrempunkt genannt wird.

d) Man kann in der Zeichnung sehen, dass der Graph 3 Nullstellen besitzt.

e) Die beiden äußeren Nullstellen sind einfache Nullstellen, der Graph schneidet die x-Achse. Die mittlere Nullstelle ist eine doppelte Nullstelle und somit eine Berührstelle. Hier liegt ein Extrempunkt – in diesem Fall ein Tiefpunkt – vor.

f) Die Funktionsgleichung lautet in allgemeiner Form: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.
Wegen des Verlaufs kann man über a aussagen, dass der Wert negativ ist.
Wegen der drei Extrempunkte kann man über b aussagen, dass dieser Wert vorhanden sein muss, da sonst der Graph ähnlich aussehen würde wie eine Parabel 2. Grades.
Da der Graph durch den Ursprung verläuft, muss c = 0 sein.
Die Funktionsgleichung reduziert sich auf: $f(x) = ax^4 + bx^2$.

Hier die Berechnung:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>		
$T(0\|0)$	$f(0) = 0$	I	$c = 0$	
$H(2\|4)$	$f(2) = 4$	II	$16a + 4b + c = 4$	c einsetzen ergibt
$x = 2$; $m = 0$	$f'(2) = 0$	III	$32a + 4b = 0$	

II $16a + 4b = 4$
III $32a + 4b = 0$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man: $a = -\frac{1}{4}$ und $b = 2$.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$$

2. Aufgabe

a) $f(x) = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$

1. Definitionsbereich:

$D = R$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

3. Symmetrie:

Achsensymmetrie zur y-Achse, da nur gerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|3{,}2)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2 |: 0{,}05$

$0 = x^4 - 20x^2 + 64$

$x^2 = z$ *(Substitution)*

$0 = z^2 - 20z + 64$

$z_{1/2} = +10 \pm \sqrt{100 - 64}$

$z_1 = 16$ und $z_2 = 4$

$z = x^2$ *(Resubstitution)*

$x^2 = 16 |\sqrt{\ }$ und $x^2 = 4 |\sqrt{\ }$

$x_{N1} = 4 \quad x_{N2} = -4 \quad x_{N3} = 2 \quad x_{N4} = -2$

$S_{x1}(4|0) \quad S_{x2}(-4|0) \quad S_{x3}(2|0) \quad S_{x4}(-2|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = 0{,}2x^3 - 2x$

$f''(x) = 0{,}6x^2 - 2$

$f'''(x) = 1{,}2x$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = 0{,}2x^3 - 2x |: 0{,}2$

$0 = x^3 - 10x$

$0 = x(x^2 - 10)$ x ausklammern ergibt: $x_{E1} = 0$

$0 = x^2 - 10 | + 10$

$10 = x^2 |\sqrt{\ }$

$x_{E2} \approx 3{,}16$ und $x_{E3} \approx -3{,}16$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$		3. Schritt	
$f''(0) = -2 < 0$	=> Hochpunkt	$f(0) = 3{,}2$	$H(0|3{,}2)$
$f''(3{,}16) \approx 3{,}99 > 0$	=> Tiefpunkt	$f(3{,}16) \approx -1{,}80$	$T(3{,}16|-1{,}80)$
$f''(-3{,}16) \approx 3{,}99 > 0$	=> Tiefpunkt	$f(-3{,}16) \approx -1{,}80$	$T(-3{,}16|-1{,}80)$

Monotonie:

$M_1 =]-\infty; -3{,}16]$ monoton fallend

$M_2 = [-3{,}16; 0]$ monoton steigend

$M_3 = [0; 3{,}16]$ monoton fallend

$M_4 = [3{,}16; +\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 0{,}6x^2 - 2 \,|\, : 0{,}6$

$0 = x^2 - \frac{10}{3} \,\Big|\, + \frac{10}{3}$

$\frac{10}{3} = x^2 \,\Big|\, \sqrt{\ }$

$x_{W1} \approx 1{,}83$ und $x_{W2} \approx -1{,}83$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(1{,}83) \approx 2{,}20 > 0 \Rightarrow R - L - K$

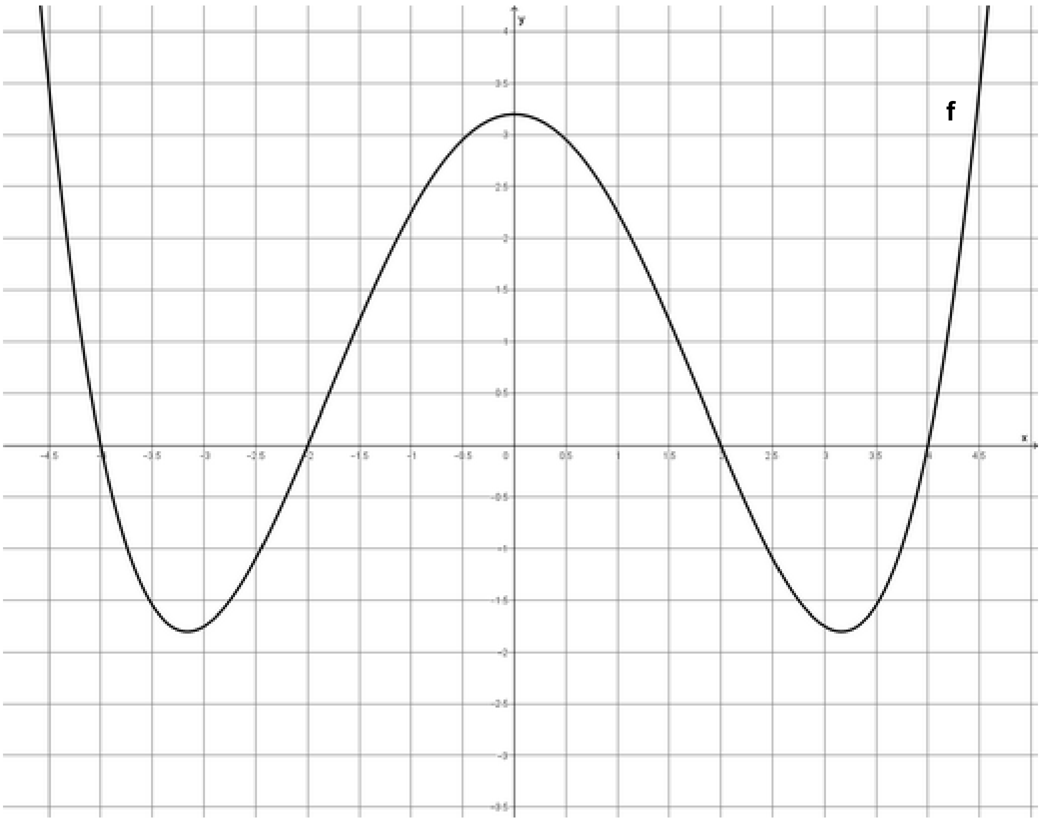
$f'''(-1{,}83) \approx -2{,}20 < 0 \Rightarrow L - R - K$

3. Schritt

$f(1{,}83) \approx 0{,}41$ $\quad W_{R-L}(1{,}83|0{,}41)$

$f(-1{,}83) \approx 0{,}41$ $\quad W_{L-R}(-1{,}83|0{,}41)$

7. Zeichnung



b) Die größte Nullstelle ist $S_{x1}(4|0)$, da sie am weitesten rechts liegt.

$t(x) = m \cdot x + b$ *(x und y sind durch den Punkt gegeben, es fehlt m)*

$f'(x) = m$

$f'(4) = 4{,}8$ => m

$0 = 4{,}8 \cdot 4 + b$

$b = -19{,}2$ $\qquad t(x) = 4{,}8x - 19{,}2$

c) $m = 4{,}8$

$f'(x) = m$

$4{,}8 = 0{,}2x^3 - 2x \,|\, -4{,}8$

$0 = 0{,}2x^3 - 2x - 4{,}8 \,|\, : 0{,}2$

$0 = x^3 - 10x - 24$

Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_1 = 4$ (Tangentenstelle) ergibt $x^2 + 4x + 6 = 0$

Die p-q-Formel $x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4 - 6}$ ist unter der Wurzel negativ und ergibt somit keine weiteren Lösungen.

Es gibt nur eine Stelle (x = 4) mit der Steigung 4,8.

d) $t(x) = f(x)$ — Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_1 = 4$

$4{,}8x - 19{,}2 = 0{,}05x^4 - x^2 + 3{,}2$ — ergibt $x^3 + 4x^2 - 4x - 112 = 0$

$0 = 0{,}05x^4 - x^2 - 4{,}8x + 22{,}4$ — weitere Polynomdivision mit $x_2 = 4$ da Tangente doppelte Lösung

$0 = x^4 - 20x^2 - 96x + 448$ — ergibt $x^2 + 8x + 28 = 0$

p-q-Formel $x_{3/4} = -4 \pm \sqrt{16 - 28}$ Wurzel negativ, also keine weiteren Schnittpunkte => nur Tangentenstelle (4l0)

e) $n(x) = m \cdot x + b$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 4{,}8 = \frac{24}{5}$ — 4,8 in TR eingeben und = drücken

$m_2 = -\frac{5}{24}$ — Punkt $(4|0)$ bleibt gleich, alles einsetzen

$0 = -\frac{5}{24} \cdot 4 + b$ => $b = \frac{5}{6}$ => $n(x) = -\frac{5}{24}x + \frac{5}{6}$

<u>3. Aufgabe</u>

$f'(x) = m$ und $m = -2$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 2$

$-2 = 3x^2 - 6x - 2 \,|+2$

$0 = 3x^2 - 6x \,|:3$

$0 = x^2 - 2x$

$0 = x(x-2)$

$x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

<u>4. Aufgabe</u>

a) Rekonstruktion

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Angaben	Mathematisierung		Gleichungen
$(0\|-2)$	$f(0) = -2$	I	$d = -2$
$x = 0$; $K = 0$	$f''(0) = 0$	II	$2b = 0 \Rightarrow b = 0$
$(3\|-20)$	$f(3) = -20$	III	$27a + 9b + 3c + d = -20$
$x = 3$; $m = -24$	$f'(3) = -24$	IV	$27a + 6b + c = -24$

b und d einsetzen in III und IV ergibt:

III $27a + 3c - 2 = -20$ => $27a + 3c = -18$

IV $27a + c = -24$

Durch Eingeben der Koeffizienten im TR erhält man: $a = -1$ und $c = 3$

$f(x) = -x^3 + 3x - 2$

b) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

1. Definitionsbereich:

$D = R$

2. Globalverlauf:

$x \to -\infty; f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$

3. Symmetrie:

Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-2)$

$f(x_N) = 0$ Polynomdiv. oder Horner-Sch. mit $x_{N1} = 1$

$0 = -x^3 + 3x - 2 \,|: (-1)$ ergibt $x^2 + x - 2 = 0$

$0 = x^3 - 3x + 2$ p-q-Formel $x_{N2/3} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 2}$

$x_{N2} = 1$ und $x_{N3} = -2$

$S_{x1/2}(1|0) \quad S_{x3}(-2|0)$

5. Extrempunkte und Monotonie

$f'(x) = -3x^2 + 3$

$f''(x) = -6x$

$f'''(x) = -6$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -3x^2 + 3 \,|+ 3x^2$

$3x^2 = 3 \,|: 3$

$x^2 = 1 \,|\sqrt{\ }$

$x_{E1} = 1$ und $x_{E2} = -1$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(1) = -6 < 0$ => Hochpunkt

$f''(-1) = 6 > 0$ => Tiefpunkt

3. Schritt

$f(1) = 0$ $H(1|0)$

$f(-1) = -4$ $T(-1|-4)$

Monotonie:

$M_1 =]-\infty; -1]$ monoton fallend

$M_2 = [-1; +1]$ monoton steigend

$M_4 = [+1; +\infty[$ monoton fallend

6. Wendepunkte

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -6x \,|: (-6)$

$x_W = 0$

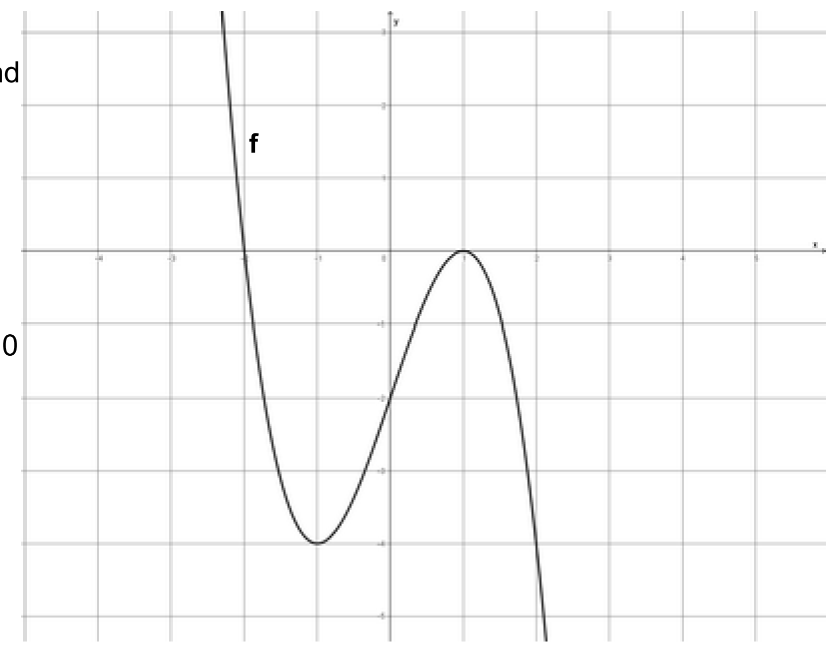
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(0) = -6 < 0 \Rightarrow L - R - K$

3. Schritt

$f(0) = -2 \quad W_{L-R}(0|-2)$

7. Zeichnung



c) kleinste Nullstelle von f(x) ist $S_{x3}(-2|0)$, Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0|-2)$

Möglichkeit I

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{0+2} = -1$

$g(x) = m \cdot x + b$

$-2 = -1 \cdot 0 + b$

$b = -2$

$g(x) = -x - 2$

Möglichkeit II

$g(x) = ax + b$

Angaben	Mathematisierung	Gleichungen
$S_{x3}(-2\|0)$	$g(-2) = 0$	I $-2a + b = 0$
$S_y(0\|-2)$	$g(0) = -2$	II $b = -2$

b einsetzen in I ergibt $a = -1$ => $g(x) = -x - 2$

d) Wendetangente = Tangente im Wendepunkt

$W_{L-R}(0|-2)$ aus Kurvendiskussion

$f'(x) = m$ mit $f'(x) = -3x^2 + 3$

$f'(0) = 3$ Steigung

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = 3 \cdot 0 + b$

$b = -2$ $\qquad t(x) = 3x - 2$

<u>5. Aufgabe</u>

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

$f''(x_W) = 0$

$0 = 6x - 12$

$x_W = 2$

$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(2) = 6 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f(2) = -1$ $\qquad W_{R-L}(2|-1)$

$f'(x) = m$ mit $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

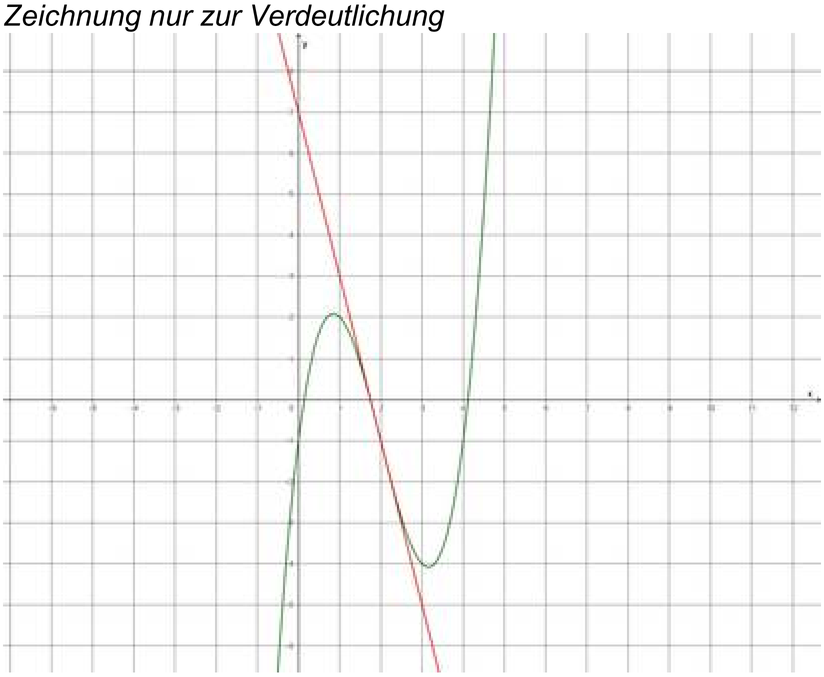
$f'(2) = -4$ Steigung

$t(x) = m \cdot x + b$

$-1 = 2 \cdot (-4) + b$

$b = 7$ $\qquad t(x) = -4x + 7$

Zeichnung nur zur Verdeutlichung



Bei einer Funktion 3. Grades berührt die Wendetangente die Kurve im Wendepunkt und schneidet sie dort auch. Berechnet man auch die gemeinsamen Schnittpunkte, so erhält man immer einen dreifachen Schnittpunkt von der Wendetangenten mit der Funktion 3. Grades.