

Lösungen G 16

1. Aufgabe

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

berührt die x-Achse = Nullstelle und Extrempunkt

Angaben

$$S_x(-2|0)$$

$$x = -2; m = 0$$

$$W(-1|-1)$$

$$x = -1; K = 0$$

Mathematisierung

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-1) = -1$$

$$f''(-1) = 0$$

Gleichungen

$$I \quad 0 = -8a + 4b - 2c + d$$

$$II \quad 0 = 12a - 4b + c$$

$$III \quad -1 = -a + b - c + d$$

$$IV \quad 0 = -6a + 2b$$

b) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Angaben

$$S_x(-2|0)$$

$$x = -2; m = 0$$

$$H(-1|3)$$

$$x = -1; m = 0$$

$$S_x(1|0)$$

Mathematisierung

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f(-1) = 3$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Gleichungen

$$I \quad 0 = 16a - 8b + 4c - 2d + e$$

$$II \quad 0 = -32a + 12b - 4c + d$$

$$III \quad 3 = a - b + c - d + e$$

$$IV \quad 0 = -4a + 3b - 2c + d$$

$$V \quad 0 = a + b + c + d + e$$

c) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Angaben

$$x = 3; m = 0$$

$$S_x(5|0)$$

$$P(-1|2)$$

$$x = -1; m = -0,5$$

Mathematisierung

$$f'(3) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f(-1) = 2$$

$$f'(-1) = -0,5$$

Gleichungen

$$I \quad 0 = 27a + 6b + c$$

$$II \quad 0 = 125a + 25b + 5c + d$$

$$III \quad 2 = -a + b - c + d$$

$$IV \quad -0,5 = 3a - 2b + c$$

d) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Wenn $t(x)$ gegeben ist, kann man damit den zugehörigen y -Wert ausrechnen: $t(3) = 5$. Dieser Punkt ist dann der doppelte Schnittpunkt der Tangente mit der Funktion.

Die y -Achse hat den x -Wert null. $x = 0$

Angaben

$$S_{1/2}(3|5)$$

$$x = 3; m = 2$$

$$P(-1|4)$$

$$x = -1; m = -2$$

$$x = 0; m = 0$$

Mathematisierung

$$f(3) = 5$$

$$f'(3) = 2$$

$$f(-1) = 4$$

$$f'(-1) = -2$$

$$f'(0) = 0$$

Gleichungen

$$I \quad 5 = 81a + 27b + 9c + 3d + e$$

$$II \quad 2 = 108a + 27b + 6c + d$$

$$III \quad 4 = a - b + c - d + e$$

$$IV \quad -2 = -4a + 3b - 2c + d$$

$$V \quad 0 = d$$

e) **PS** $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$
 $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$
 $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$

Ein Sattelpunkt hat die Steigung $m = 0$ und ist auch ein Wendepunkt.

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
Sattelp(2 1)	$f(2) = 1$	I $32a + 8b + 2c = 1$
$x = 2; m = 0$	$f'(2) = 0$	II $80a + 12b + c = 0$
$x = 2; K = 0$	$f''(2) = 0$	III $160a + 12b = 0$

f) **AS** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
 $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
 $f''(x) = 12ax^2 + 2b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
W(-3 2)	$f(-3) = 2$	I $81a + 9b + c = 2$
$x = -3; K = 0$	$f''(-3) = 0$	II $108a + 2b = 0$
$x = -3; m = -2$	$f'(-3) = -2$	III $-108a - 6b = -2$

Aufgabe 2

a) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
 $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
Sattelp(0 0)	$f(0) = 0$	I $0 = e$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	II $0 = d$
$x = 0; K = 0$	$f''(0) = 0$	III $0 = 2c \Rightarrow 0 = c$
$S_x(2 0)$	$f(2) = 0$	IV $0 = 16a + 8b + 4c + 2d + e$
$x = 1; m = 2$	$f'(1) = 2$	V $2 = 4a + 3b + 2c + d$

Die Variablen c, d und e sind gleich null und fallen deshalb weg. Dies vereinfacht das Gleichungssystem auf:

$$\begin{array}{l} \text{IV } 0 = 16a + 8b \\ \text{V } 2 = 4a + 3b \cdot (-4) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{IV } 0 = 16a + 8b \\ \text{V } -8 = -16a - 12b \end{array} \quad \text{addieren ergibt } -8 = -4b \mid :(-4) \text{ also } b = 2$$

Durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen berechnet man: $a = -1$.
 Man erhält die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x) = -x^4 + 2x^3$$

(Überprüft man die einzelnen Angaben mit dieser Gleichung, kann man die Richtigkeit der Rechnung bestätigen.)

b) **PS** $f(x) = ax^3 + bx$
 $f'(x) = 3ax^2 + b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>	
$P(1 -8)$	$f(1) = -8$	I $-8 = a + b$	b einsetzen in I ergibt:
$x = 0; m = -9$	$f'(0) = -9$	II $-9 = b$	$a = 1$

(Der Ursprung als Punkt selbst kann hier nicht verwendet werden, da dann nur $0 = 0$ herauskommt.)

$$f(x) = x^3 - 9x$$

c) **AS** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
 $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$S_y(0 4)$	$f(0) = 4$	I $4 = c$
$S_x(1 0)$	$f(1) = 0$	II $0 = a + b + c$
$x = 1; m = -6$	$f'(1) = -6$	III $-6 = 4a + 2b$

Ist der Wert einer oder mehrerer Variablen bereits bekannt, setzt man diese in die anderen Gleichungen ein.

II $0 = a + b + 4$	$ -4$	$-4 = a + b$	$\cdot (-2)$	$8 = -2a - 2b$	
III $-6 = 4a + 2b$		$-6 = 4a + 2b$		$-6 = 4a + 2b$	addieren

$$2 = 2a \Rightarrow a = 1 \text{ Durch Einsetzen in z.B. II ergibt sich: } b = -5$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f''(x) = 6ax + 2b$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$x = 2 \quad m = -6$	$f'(2) = -6$	I $-6 = 12a + 4b + c$
$W(0 -1)$	$f(0) = -1$	II $-1 = d$
$x = 0; K = 0$	$f''(0) = 0$	III $0 = 2b \Rightarrow 0 = b$
$x = 0; m = 6$	$f'(0) = 6$	IV $6 = c$

b und c einsetzen in I ergibt:

$$-6 = 12a + 4 \cdot 0 + 6 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -x^3 + 6x - 1$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

e) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
O(0 0)	$f(0) = 0$	I $0 = d$
$x = 0; m = 0$	$f'(0) = 0$	II $0 = c$
P(-3 0)	$f(-3) = 0$	III $0 = -27a + 9b - 3c + d$
$x = -3; m = 9$	$f'(-3) = 9$	IV $9 = 27a - 6b + c$

Die Variablen c und d sind null und fallen weg.

III $0 = -27a + 9b$

IV $9 = 27a - 6b$ addieren $\Rightarrow 9 = 3b$ also $b = 3$ und durch Einsetzen ergibt sich $a = 1$

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

f) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

waagrechte Tangente = Steigung null

<u>Angaben</u>	<u>Mathematisierung</u>	<u>Gleichungen</u>
$S_x(4 0)$	$f(4) = 0$	I $0 = 64a + 16b + 4c + d$
$x = 4; m = 0$	$f'(4) = 0$	II $0 = 48a + 8b + c$
W(2 3)	$f(2) = 3$	III $3 = 8a + 4b + 2c + d$
$x = 2; K = 0$	$f''(2) = 0$	IV $0 = 12a + 2b$

I $0 = 64a + 16b + 4c + d$

$0 = 64a + 16b + 4c + d$

III $3 = 8a + 4b + 2c + d \cdot (-1)$

$-3 = -8a - 4b - 2c - d$ addieren \Rightarrow V $-3 = 56a + 12b + 2c$

V $-3 = 56a + 12b + 2c$

$-3 = 56a + 12b + 2c$

II $0 = 48a + 8b + c \cdot (-2)$

$0 = -96a - 16b - 2c$ addieren \Rightarrow VI $-3 = -40a - 4b$

VI $-3 = -40a - 4b$

$-3 = -40a - 4b$

IV $0 = 12a + 2b \cdot 2$

$0 = 24a + 4b$ addieren $\Rightarrow -3 = -16a \Rightarrow a = \frac{3}{16}$

Durch Einsetzen ergibt sich dann Stück für Stück: $b = -\frac{9}{8}$ und $c = 0$ und $d = 6$

$$f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + 6$$