Lösungen G 13

1. Aufgabe

a) zuerst Nullstellen berechnen von $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x$ also $f(x)=0$

=> $x_1=0$ $x_2=3$ $x_3=-3$; $S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(3|0)$ $S_{x3}(-3|0)$

$f'(x)=m$ $f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$

$f'(0)=-1$	$f'(3)=2$	$f'(-3)=2$
$t(x)=m\cdot x+b$	$t(x)=m\cdot x+b$	$t(x)=m\cdot x+b$
$0=-1\cdot 0+b$	$0=2\cdot 3+b$	$0=2\cdot(-3)+b$
$b=0$	$b=-6$	$b=6$
$t_1(x)=-x$	$t_2(x)=2x-6$	$t_3(x)=2x+6$

Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die spiegelgleichen x-Werte 3 und -3 weisen bei der Tangente dieselbe Steigung auf. Die y-Achsenabschnitte besitzen die gleiche Zahl mit unterschiedlichem Vorzeichen.

b) $f(x)=0{,}5x^4-2{,}5x^2+2$ Achsensymmetrie => Tangenten nur im positiven x-Werte Bereich berechnen und spiegeln

$f(x)=0$ => $x_1=1$ $x_2=-1$ $x_3=2$ $x_4=-2$; $S_{x1}(1|0)$ $S_{x2}(-1|0)$ $S_{x3}(2|0)$ $S_{x4}(-2|0)$

$f'(x)=m$ $f'(x)=2x^3-5x$

$f'(1)=-3$		$f'(2)=6$	
$t(x)=m\cdot x+b$		$t(x)=m\cdot x+b$	
$0=-3\cdot 1+b$		$0=6\cdot(2)+b$	
$b=3$		$b=-12$	
$t_1(x)=-3x+3$	$t_2(x)=3x+3$	$t_3(x)=6x-12$	$t_4(x)=-6x-12$

Bei Achsensymmetrie bleiben die y-Achsenabschnitte gleich und die Steigung wird im Vorzeichen gedreht.

2. Aufgabe

a) $f(x)=0{,}25x^4-3x^3+9x^2$ 1. $x\to-\infty; f(x)\to+\infty$ $x\to+\infty; f(x)\to+\infty$ 2. gestaucht 3. KS

4. $S_y(0|0)$ $f(x)=0$ $0=0{,}25x^4-3x^3+9x^2 \quad |:(-0{,}25)$

$0=x^4-12x^3+36x^2$ ausklammern

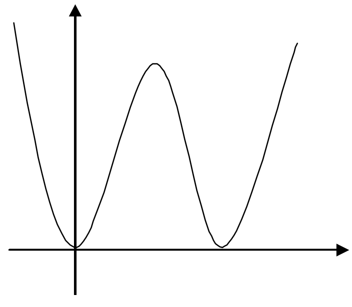
$0=x^2(x^2-12x+36)$

$x_{1/2}=0$ V $x^2-12x+36=0$ p-q

$x_{3/4}=6$

$S_{x1/2}(0|0)$ $S_{x3/4}(6|0)$

5.



b) Die Steigung 1 kommt 3 mal im Graphen vor.

c) Links $(-\infty)$ und rechts $(+\infty)$ kommen Steigungen im Graphen nur einmal vor.

d) $f'(x) = x^3 - 9x^2 + 18x \qquad m = 10$

$10 = x^3 - 9x^2 + 18x \quad |-10$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ führt zu $x^2 - 8x + 10 = 0$

$0 = x^3 - 9x^2 + 18x - 10$

mit p-q ergibt sich $x_2 = 6{,}4$ und $x_3 = 1{,}6$

e) $f'(x) = x^3 - 9x^2 + 18x \qquad m = 0$

$0 = x^3 - 9x^2 + 18x \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 3$

f) Diese drei Stellen sind die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion mit der Steigung null.

3. Aufgabe

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ 1. $x \to -\infty;\ f(x) \to -\infty$ / $x \to +\infty;\ f(x) \to +\infty$ 2. normal 3. KS

4. $S_y(0|32) \qquad f(x) = 0 \qquad 0 = x^3 - 6x^2 + 32$

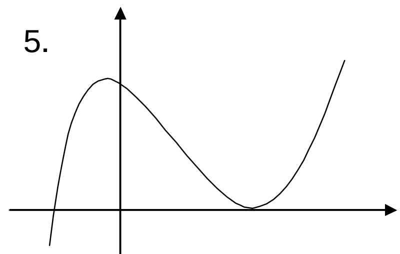
$0 = x^3 - 6x^2 + 0x + 32$

Polynomdivision mit $x_1 = -2$

ergibt $x^2 - 8x + 16 = 0$ => $x_{2/3} = 4$

$S_{x1}(-2|0) \qquad S_{x2/3}(4|0)$

5.



(y-Achse einteilen in 1 cm = 10 Einheiten)

b) $f'(x) = m \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x \qquad x = 2$

$f'(2) = -12$

c) $-12 = 3x^2 - 12x \quad |+12$

$0 = 3x^2 - 12x + 12 \quad |:3$

$0 = x^2 - 4x + 4$ p-q

$x_{1/2} = 2$

Die Stelle $x = 2$ ist die einzige Lösung für diesen Steigungswert. Die doppelte Lösung weist auf eine besondere Stelle hin. (siehe Aufgabe d)

d) Die Stelle liegt in der Mitte zwischen Hoch- und Tiefpunkt. Sie ist die steilste Stelle in diesem Bereich. Es ist die Wendestelle des Graphen.
(Übergang von Rechts- in Linkskurve = keine Krümmung)

4. Aufgabe

a) Da t(x) gegeben ist, kann man mit dem x-Wert den zugehörigen y-Wert berechnen. Dann setzt man den Punkt in die Funktionsgleichung von f(x) ein und berechnet a.

$t(x) = 3x$ also $t(-2) = -6$ => $P(-2|-6)$

$f(x) = ax^3 + 0{,}25x^2 + x - 3 \qquad P(-2|-6)$

$-6 = a \cdot (-2)^3 + 0{,}25 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3$

$-6 = -8a - 4$

$-2 = -8a$ => $f(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 + x - 3$

$0{,}25 = a$

$t(x) = f(x)$

$3x = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 + x - 3 \quad |-3x$

b) $0 = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 - 2x - 3 \quad |:0{,}25$

$0 = x^3 + x^2 - 8x - 12$

Polynomdivision mit $x_1 = -2$ führt zu $0 = x^2 - x - 6$ mit p-q ergibt sich $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.
Die Stelle -2 ist die doppelte Lösung der Tangente. Somit führt x = 3 zum weiteren Schnittpunkt.
$t(3) = 9 \qquad S_3(3|9)$ (Auch in f(x) überprüfen.)

5. Aufgabe

Funktion und Stelle sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \qquad x = 1 \qquad f(1) = 6{,}75$ y-Wert

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x \qquad x = 1 \qquad f'(1) = -2{,}25$ m

$t(x) = m \cdot x + b$

$6{,}75 = -2{,}25 \cdot 1 + b$ => $t(x) = -2{,}25x + 9$

$9 = b$

$t(x) = f(x)$

$-2{,}25x + 9 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 8 \quad |+2{,}25x - 9$

$0 = 0{,}25x^3 - 1{,}5x^2 + 2{,}25x - 1 \quad |:0{,}25$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ ergibt $0 = x^2 - 5x + 4$

$0 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$x_2 = 4$ und $x_3 = 1$

Die Stelle x = 1 ist doppelte Lösung, also Tangente.
Die Stelle x = 4 liefert den gesuchten Punkt.

$f(4) = 0 \qquad P(4|0)$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)