Lösungen F 17

1. Aufgabe

a) $f_b(x) = x^2 + bx - 2$; $b \in R$

Der Verlauf wird nur anhand der höchsten Potenz beurteilt. Hier spielt der Parameter b keine Rolle. Deshalb keine Abhängigkeit beim Verlauf.

$x \to -\infty; f_b(x) \to +\infty$

$x \to +\infty; f_b(x) \to +\infty$

Bei der Symmetrie betrachtet man alle Exponenten der Funktion. Da der Parameter b hier beachtet werden muss, führt man eine Fallunterscheidung durch.

$b < 0$
$b > 0$ keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

$b = 0$ Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden sind.
(wenn $b = 0$ => $0 \cdot x = 0$ also nur $f_0(x) = x^2 - 2$)

b) $f_b(x) = x^2 + bx - 2$

$f_b'(x) = 2x + b$

$f_b''(x) = 2$

$f_b'(x_E) = 0$

$0 = 2x + b$

$x_E = -\frac{1}{2}b$

$f_b'(x_E) = 0 \wedge f_b''(x_E) \neq 0$

$f_b''\left(-\frac{1}{2}b\right) = 2 > 0 \Rightarrow T$

y-Wert berechnen durch Einsetzen

$f_b\left(-\frac{1}{2}b\right) = \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{2}b\right) - 2$

$f_b\left(-\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b^2 - 2$

$f_b\left(-\frac{1}{2}b\right) = -\frac{1}{4}b^2 - 2$

$T\left(-\frac{1}{2}b \middle| -\frac{1}{4}b^2 - 2\right)$

c) $M_1 = \left]-\infty; -\frac{1}{2}b\right]$ monoton fallend

$M_2 = \left[-\frac{1}{2}b; +\infty\right[$ monoton steigend

d) $f_2(x) = x^2 + 2x - 2$

$x = 0$

$f_2(0) = -2$

$S_y(0|-2)$

$f_2(x_N) = 0$

$0 = x^2 + 2x - 2$

$x_{N1/N2} = -1 \pm \sqrt{1+2}$

$x_{N1} \approx 0{,}73$ $x_{N2} \approx -2{,}73$

$S_{x1}(0{,}73|0)$ $S_{x2}(-2{,}73|0)$

$f_{-1}(x) = x^2 - x - 2$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $f_{-1}(x_N) = 0$

$f_{-1}(0) = -2$ $\qquad$ $0 = x^2 - x - 2$

$S_y(0|-2)$ $\qquad$ $x_{N1/N2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 2}$

$x_{N1} = 2 \qquad x_{N2} = -1$

$S_{x1}(2|0) \qquad S_{x2}(-1|0)$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei allen Graphen der Funktionsschar gleich, da er unabhängig vom Parameter b ist.
Die Schnittpunkte mit der x-Achse weisen keine Gemeinsamkeiten auf. Der Parameter b hat Einfluss auf das Ergebnis, deshalb sind die S_x abhängig von b.

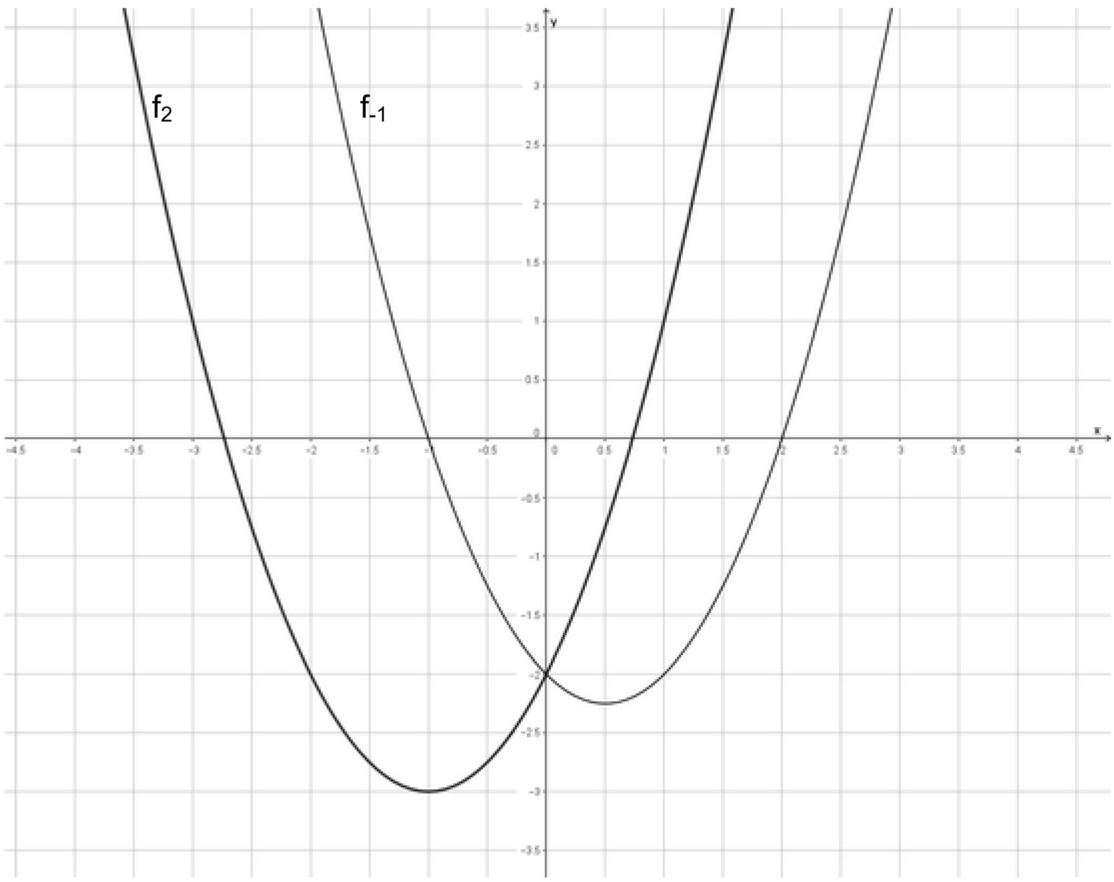
e) $f_2(x) = x^2 + 2x - 2$

$b = 2$ einsetzen in $T\left(-\frac{1}{2}b \middle| -\frac{1}{4}b^2 - 2\right)$ ergibt $T(-1|-3)$

$f_{-1}(x) = x^2 - x - 2$

$b = -1$ einsetzen in $T\left(-\frac{1}{2}b \middle| -\frac{1}{4}b^2 - 2\right)$ ergibt $T(0{,}5|-2{,}25)$

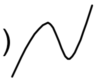
f)



2. Aufgabe

a) $f_a(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x\,;\; a > 0$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{array}{l} x \to -\infty; f_a(x) \to -\infty \\ x \to +\infty; f_a(x) \to +\infty \end{array}$ (Die Graphen kommen von unten und gehen nach oben.) 

3. Keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.
(Der Parameter a ist eingeschränkt.)

4. Schnittpunkte mit den Achsen:
$x = 0 \qquad f_a(0) = 0 \qquad S_y(0|0)$ für alle Funktionen gleich, unabhängig von a

$$f_a(x_N) = 0$$
$$0 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$$
$$0 = x\left(x^2 - 2ax + a^2\right)$$
$$x_{N1} = 0 \qquad x^2 - 2ax + a^2 = 0$$
$$x_{N1/N2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2}$$
$$x_{N1/N2} = a$$

$S_{x1}(0|0)$ für alle Funktionen gleich, unabhängig von a,
$S_{x2/3}(a|0)$ doppelte Nullstelle (Berührpunkt mit der x-Achse) abhängig von a

Ableitungen
$$f_a'(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$$
$$f_a''(x) = 6x - 4a$$
$$f_a'''(x) = 6$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

$$f'(x_E) = 0$$
$$0 = 3x^2 - 4ax + a^2 \,|: 3$$
$$0 = x^2 - \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2$$
$$x_{E1/E2} = \frac{2}{3}a \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \frac{1}{3}a^2}$$
$$x_{E1/E2} = \frac{2}{3}a \pm \sqrt{\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{3}a^2}$$
$$x_{E1/E2} = \frac{2}{3}a \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2}$$
$$x_{E1/E2} = \frac{2}{3}a \pm \frac{1}{3}a$$
$$x_{E1} = a$$

$$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$$
$$f''(a) = 6 \cdot a - 4a = 2a > 0 \Rightarrow T$$
$$f''\left(\frac{1}{3}a\right) = 6 \cdot \frac{1}{3}a - 4a = -2a < 0 \Rightarrow H$$

$$f(a) = a^3 - 2a \cdot a^2 + a^2 \cdot a$$
$$f(a) = a^3 - 2a^3 + a^3 \qquad T(a|0)$$
$$f(a) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}a\right) = \left(\frac{1}{3}a\right)^3 - 2a \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2 + a^2 \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)$$
$$f\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{9}a^3 + \frac{1}{3}a^3 \qquad H\left(\frac{1}{3}a\,\middle|\,\frac{4}{27}a^3\right)$$
$$f\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3$$

$x_{E2} = \frac{1}{3}a$

$M_1 = \left]-\infty; \frac{1}{3}a\right]$ monoton steigend

$M_2 = \left[\frac{1}{3}a; a\right]$ monoton fallend

$M_3 = [a; +\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte:

$f_a''(x_W) = 0$

$0 = 6x - 4a$

$x_W = \frac{2}{3}a$

$f_a''(x_W) = 0 \wedge f_a'''(x_W) \neq 0$

$f_a'''\left(\frac{2}{3}a\right) = 6 > 0 \Rightarrow R-L-K$

$f\left(\frac{2}{3}a\right) = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 - 2a \cdot \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + a^2 \cdot \left(\frac{2}{3}a\right)$

$f\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{8}{27}a^3 - \frac{8}{9}a^3 + \frac{2}{3}a^3$

$f\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3$

$W_{R-L}\left(\frac{2}{3}a \middle| \frac{2}{27}a^3\right)$

b) $f_2(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$S_y(0|0)$

$S_{x1}(0|0)$

$S_{x2/3}(2|0)$

$T(2|0)$

$H\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{32}{27}\right)$ oder $H(0{,}67|1{,}19)$

$W_{R-L}\left(\frac{4}{3} \middle| \frac{16}{27}\right)$ oder $W_{R-L}(1{,}33|0{,}59)$

$f_3(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$S_y(0|0)$

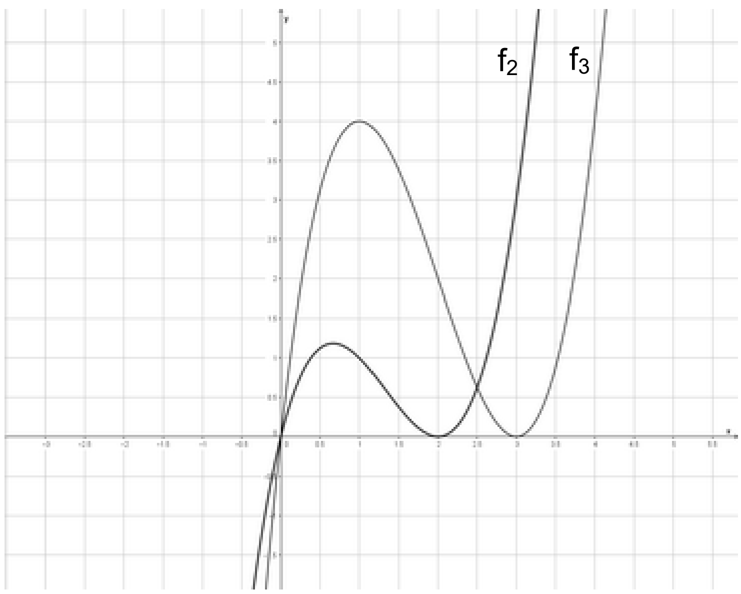
$S_{x1}(0|0)$

$S_{x2/3}(3|0)$

$T(3|0)$

$H(1|4)$

$W_{R-L}(2|2)$



$f_3(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $W_{R-L}(2|2)$

$f'(x) = m$

$f_3'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f_3'(2) = -3$

$t(x) = m \cdot x + b$

$2 = -3 \cdot 2 + b$ $\qquad$ $t(x) = -3x + 8$

$b = 8$

d) $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = -3$

$m_2 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $W_{R-L}(2|2)$

$n(x) = m \cdot x + b$

$2 = \frac{1}{3} \cdot 2 + b$ $\qquad$ $n(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$b = \frac{4}{3}$

e) $n(x) = f_3(x)$

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = x^3 - 6x^2 + 9x \left| -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \right.$

$0 = x^3 - 6x^2 + \frac{26}{3}x - \frac{4}{3}$ $\qquad$ ermitteln = Einsatz des Taschenrechners (EQN)

TR: $x_1 = 0{,}17$ $\quad n(0{,}17) = 1{,}39$ $\quad S_1(0{,}17|1{,}39)$ $\quad$ vgl: $f(0{,}17) = 1{,}36$

$x_2 = 3{,}83$ $\quad n(3{,}83) = 2{,}61$ $\quad S_2(3{,}83|2{,}61)$ $\quad f(3{,}83) = 2{,}64$

$x_3 = 2$ $\quad n(2) = 2$ $\quad S_3(2|2)$

f) $x = 0$ $\qquad n(0) = 1{,}33$ $\qquad S_y(0|1{,}33)$

g) $\tan(\alpha) = m$

$\tan^{-1}(m) = \alpha$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha$ $\quad$ TR: SHIFT tan

$\alpha = 18{,}43°$

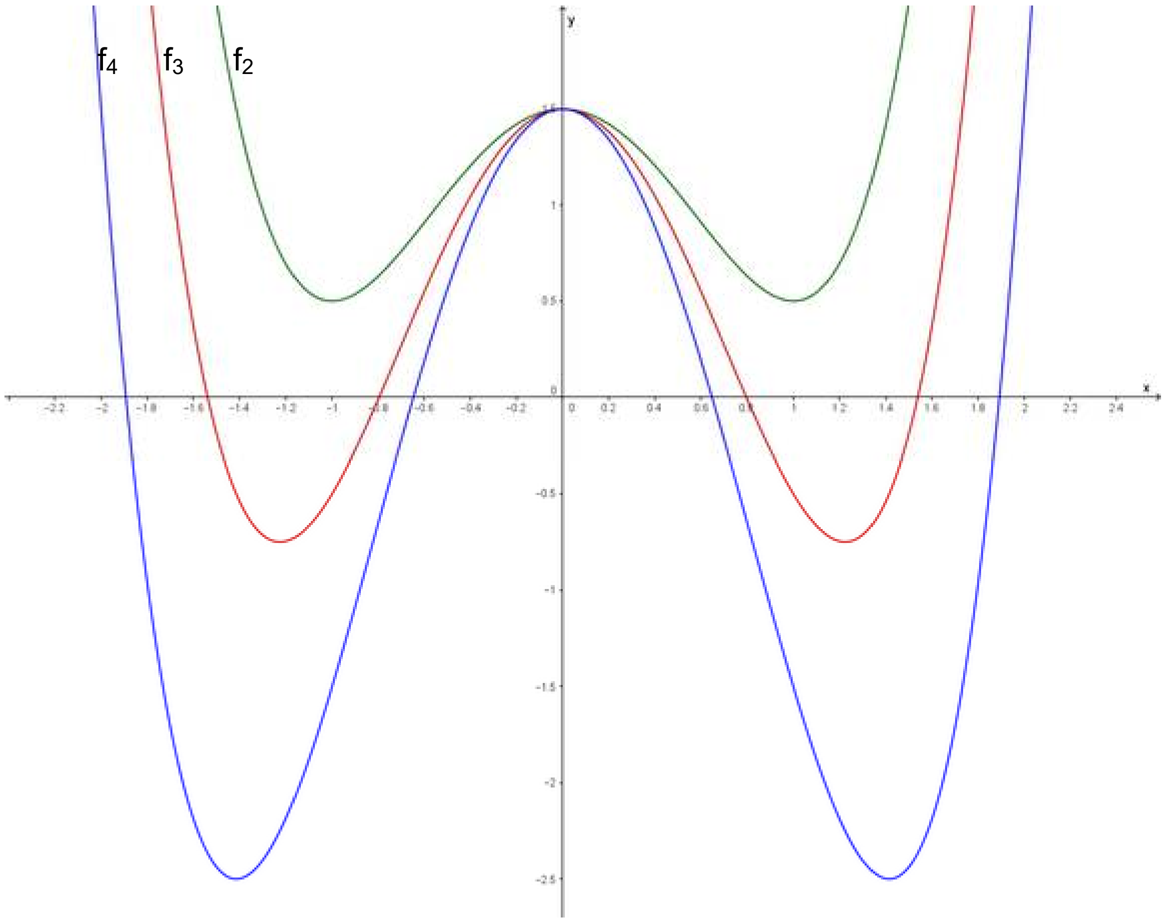
<u>3. Aufgabe</u>

$f_k(x) = x^4 - kx^2 + 1{,}5;\ \ k > 0$

a) $x \to -\infty; f_k(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f_k(x) \to +\infty$ $\qquad$ keine Abhängigkeit von k

Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden sind ($k > 0$)
keine Abhängigkeit von k

b) $f_2(x) = x^4 - 2x^2 + 1{,}5$ $\qquad$ $f_3(x) = x^4 - 3x^2 + 1{,}5$ $\qquad$ $f_4(x) = x^4 - 4x^2 + 1{,}5$



c) $S_y(0|1{,}5)$ ist allen Graphen von $f_k(x)$ gemeinsam, da für $x = 0$ alle Terme mit x den Wert Null annehmen und das absolute Glied keinen Parameter k enthält.

d) $f_{2,5}(x) = x^4 - 2{,}5x^2 + 1{,}5$

$f_{2,5}(x_N) = 0$

$0 = x^4 - 2{,}5x^2 + 1{,}5$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 2{,}5z + 1{,}5$

$z_{1/2} = +\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1{,}5}$

$z_1 = 1{,}5$ $\qquad$ $z_2 = 1$

$z = x^2$

$x^2 = 1{,}5 \,|\sqrt{}$ $\qquad$ $x^2 = 1 \,|\sqrt{}$

$x_1 \approx 1{,}22$ $\qquad$ $x_3 = 1$

$x_2 \approx -1{,}22$ $\qquad$ $x_4 = -1$

$S_{x1}(1{,}22|0)$ $\quad$ $S_{x2}(-1{,}22|0)$ $\quad$ $S_{x3}(1|0)$ $\quad$ $S_{x4}(-1|0)$

e) $f_k(x) = x^4 - kx^2 + 1{,}5$

$f_k'(x) = 4x^3 - 2kx$

$f_k''(x) = 12x^2 - 2k$

$f_k'(x_E) = 0$

$0 = 4x^3 - 2kx$

$0 = x(4x^2 - 2k)$

$x_{E1} = 0 \qquad 4x^2 - 2k = 0 \,|+2k$

$4x^2 = 2k \,|:4$

$x^2 = \frac{1}{2}k \,|\sqrt{}$

$x_{E2} = +\sqrt{\frac{1}{2}k} \qquad x_{E3} = -\sqrt{\frac{1}{2}k}$

$f_k'(x_E) = 0 \wedge f_k''(x_E) \neq 0$

$f_k''(0) = 12 \cdot 0^2 - 2k = -2k < 0 \Rightarrow H$

$f_k''\left(+\sqrt{\frac{1}{2}k}\right) = 12 \cdot \left(+\sqrt{\frac{1}{2}k}\right)^2 - 2k = 12 \cdot \frac{1}{2}k - 2k = 6k - 2k = 4k > 0 \Rightarrow T$

$f_k''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k}\right) = 12 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}k}\right)^2 - 2k = 12 \cdot \frac{1}{2}k - 2k = 6k - 2k = 4k > 0 \Rightarrow T$

$f_k(0) = 1{,}5 \qquad H(0|1{,}5)$

$f_k\left(+\sqrt{\frac{1}{2}k}\right) = \left(+\sqrt{\frac{1}{2}k}\right)^4 - k \cdot \left(+\sqrt{\frac{1}{2}k}\right)^2 + 1{,}5 = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k^2 + 1{,}5 = -\frac{1}{4}k^2 + 1{,}5$

$T\left(+\sqrt{\frac{1}{2}k} \,\middle|\, -\frac{1}{4}k^2 + 1{,}5\right)$

$f_k\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k}\right) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}k}\right)^4 - k \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}k}\right)^2 + 1{,}5 = \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{2}k^2 + 1{,}5 = -\frac{1}{4}k^2 + 1{,}5$

$T\left(-\sqrt{\frac{1}{2}k} \,\middle|\, -\frac{1}{4}k^2 + 1{,}5\right)$

f) Tiefpunkt auf der x-Achse bedeutet $y = 0$.

$-\frac{1}{4}k^2 + 1{,}5 = 0 \,|-1{,}5$

$-\frac{1}{4}k^2 = -1{,}5 \,\middle|: \left(-\frac{1}{4}\right)$

$k^2 = 6 \,|\sqrt{}$

$k_1 = +\sqrt{6} \qquad$ ($k_2 = -\sqrt{6}$ nicht möglich, da $k > 0$)

g) Im Koordinatensystem sieht man Graphen, die keine Nullstellen oder 4 Nullstellen besitzen. Also muss es auch einen Graphen mit 2 Nullstellen geben.
Der Wert für k wurde bereits in Aufgabe f) berechnet.
Nun führt man eine Fallunterscheidung durch.

$k > \sqrt{6}$ erhält man 4 Nullstellen, (Tiefpunkte liegen unterhalb der x-Achse)

$k = \sqrt{6}$ erhält man 2 Nullstellen, (Tiefpunkte liegen auf der x-Achse)

$k < \sqrt{6}$ erhält man keine Nullstelle. (Tiefpunkte liegen oberhalb der x-Achse)

4. Aufgabe

$f_a(x) = ax^3 + 0{,}25x^2 + x - 3\,;\ a \in R$

a) $x = -2\,;\ m = 3$

$f_a'(x) = 3ax^2 + 0{,}5x + 1$

$f_a'(x) = m$

$3 = 3a \cdot (-2)^2 + 0{,}5 \cdot (-2) + 1$

$3 = 12a$

$a = 0{,}25$

$f_{0,25}(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 + x - 3$

b) $t(x) = m \cdot x + b$

$x = -2\,;\ m = 3$

$f_{0,25}(-2) = -6$ y-Wert

$-6 = 3 \cdot (-2) + b$

$b = 0$

$t(x) = 3x$

Schnittpunkte ermitteln

$t(x) = f_{0,25}(x)$

$3x = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 + x - 3 \,|\, -3x$

$0 = 0{,}25x^3 + 0{,}25x^2 - 2x - 3$

TR (EQN)

$x_{1/2} = -2$ Tangentenstelle

$x_3 = 3$ weitere Schnittstelle

$t(3) = 9$

$S_3(3|9)$