

Lösungen F 14

1. Aufgabe

$$f(x) = 0,05x^4 - x^2 + 3,2$$

a) $f'(x) = 0,2x^3 - 2x$

$$f''(x) = 0,6x^2 - 2$$

$$f'''(x) = 1,2x$$

Am besten zuerst die Ableitungen bilden!

1. Definitionsbereich
2. Verlauf der Funktion
3. Symmetrie
4. S_x / S_y
5. Extrempunkte
6. Wendepunkte
7. Zeichnung

1. $D = \mathbb{R}$ 2. $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow +\infty$ 3. AS 4. $S_y(0|3,2)$ und für S_x $f(x) = 0 \Rightarrow$

$$0 = 0,05x^4 - x^2 + 3,2 \quad | : 0,05$$

Substitution mit $x^2 = z$ also $0 = z^2 - 20z + 64$

$$0 = x^4 - 20x^2 + 64$$

Lösen mit p-q liefert $z_1 = 16$ und $z_2 = 4$

Resubstitution mit $z = x^2 \Rightarrow x^2 = 16$ und $x^2 = 4$

Wurzel ziehen ergibt: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$ $x_3 = 2$ $x_4 = -2$

$$S_{x1}(4|0) \quad S_{x2}(-4|0) \quad S_{x3}(2|0) \quad S_{x4}(-2|0)$$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

1. Schritt

$$0 = 0,2x^3 - 2x \quad | : 0,2$$

$$0 = x^2 - 10 \quad | +10$$

x ausklammern ergibt: $x_1 = 0$ und

$$0 = x^3 - 10x$$

$$10 = x^2 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_2 = 3,2 \quad x_3 = -3,2$$

2. Schritt

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

3. Schritt

$$f(0) = 3,2 \quad H(0|3,2)$$

$$f''(3,2) = 4,1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f(3,2) = -1,8 \quad T(3,2|-1,8)$$

$$f''(-3,2) = 4,1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f(-3,2) = -1,8 \quad T(-3,2|-1,8)$$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

1. Schritt

$$0 = 0,6x^2 - 2 \quad | : 0,6$$

2. Schritt

$$f'''(1,8) = 2,2 > 0$$

$$R - L - K \quad f(1,8) = 0,5$$

$$W_{R-L}(1,8|0,5)$$

$$f'''(-1,8) = -2,2 < 0$$

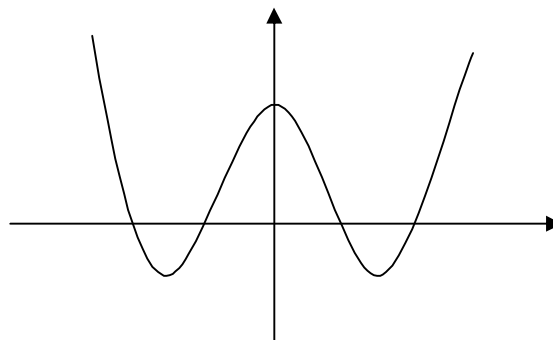
$$L - R - K \quad f(-1,8) = 0,5$$

$$W_{L-R}(-1,8|0,5)$$

$$\frac{10}{3} = x^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 1,8 \vee x_2 = -1,8$$

7. Zeichnung



b) größte Nullstelle: $x = 4$ bzw. $S_x(4|0)$

$$f'(x) = m \text{ mit } f'(x) = 0,2x^3 - 2x$$

$$f'(4) = 4,8$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

alle Werte (x,y,m) einsetzen und b berechnen

$$0 = 4,8 \cdot 4 + b$$

$$b = -19,2$$

$$t(x) = 4,8x - 19,2$$

c) $\tan \alpha = m$

$$\tan^{-1} m = \alpha$$

$$\tan^{-1} 4,8 = \alpha$$

$$\alpha = 78,2^\circ$$

d) $m = 4,8$

$$f'(x) = m$$

$$4,8 = 0,2x^3 - 2x \quad | -4,8$$

$$0 = 0,2x^3 - 2x - 4,8 \quad | :0,2$$

$$0 = x^3 - 10x - 24$$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ (Tangentenstelle mit Steigung 4,8)

$$(x^3 + 0x^2 - 10x - 24) : (x - 4) = x^2 + 4x + 6$$

Die p-q-Formel $x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4 - 6}$ ist unter der Wurzel negativ und ergibt somit keine weiteren Lösungen.

Es gibt nur eine Stelle ($x = 4$) mit der Steigung 4,8.

e) $t(x) = f(x)$

$$4,8x - 19,2 = 0,05x^4 - x^2 + 3,2$$

$$0 = 0,05x^4 - x^2 - 4,8x + 22,4$$

$$0 = x^4 - 20x^2 - 96x + 448$$

Polynomdivision mit $x_1 = 4$ da hier die Tangente anliegt

$$(x^4 + 0x^3 - 20x^2 - 96x + 448) : (x - 4) = x^3 + 4x^2 - 4x - 112$$

weitere Polynomdivision mit $x_2 = 4$ da Tangente doppelte Lösung

$$(x^3 + 4x^2 - 4x - 112) : (x - 4) = x^2 + 8x + 28$$

p-q-Formel $x_{3/4} = -4 \pm \sqrt{16 - 28}$ Wurzel negativ, also keine weiteren Schnittpunkte => nur Tangentenstelle (4|0)

f) $n(x) = m \cdot x + b$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{4,8} = -\frac{5}{24} \quad \text{Punkt } (4|0) \text{ bleibt gleich}$$

$$0 = -\frac{5}{24} \cdot 4 + b \Rightarrow b = \frac{5}{6} \Rightarrow n(x) = -\frac{5}{24}x + \frac{5}{6}$$

2. Aufgabe

a) $f'(x) = m$ mit $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$

$$f'(2) = -1,5 \quad \text{also } m = -1,5$$

b) $-1,5 = \frac{3}{8}x^2 - 1,5x$

p-q-Formel liefert $x_{1/2} = 2$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - 1,5x + 1,5$$

also keine weiteren Stellen

$$0 = x^2 - 4x + 4$$

c) Da die Stelle $x = 2$ als doppelte Lösung vorkommt, handelt es sich bei einer Funktion 3. Grades um einen Wendepunkt.

$$d) f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4}$$

$$1. D = R \quad 2. \begin{matrix} x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

$$3. KS \quad 4. S_y(0|4) \text{ für } S_x f(x) = 0$$

$$0 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 32 \text{ Poly.div. mit } x_1 = -2$$

$$(x^3 - 6x^2 + 0x + 32) : (x + 2) = x^2 - 8x + 16$$

$$p\text{-}q\text{-Formel liefert } x_{2/3} = 4 \Rightarrow S_{x1}(-2|0) \text{ und } S_{x2/3}(4|0)$$

$$5. f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x : \frac{3}{8}$$

$$0 = x^2 - 4x$$

$$0 = x(x - 4)$$

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 4$$

$$f''(0) = -1,5 < 0 \Rightarrow H \quad f(0) = 4 \quad H(0|4)$$

$$f''(4) = 1,5 > 0 \Rightarrow T \quad f(4) = 0 \quad T(4|0)$$

$$6. f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

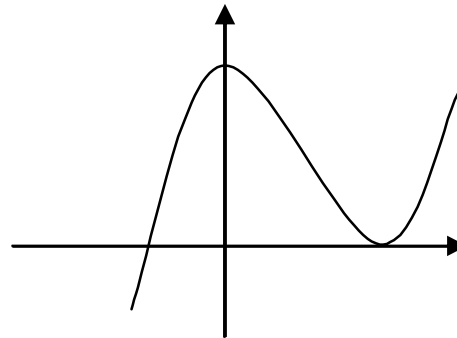
$$0 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$1,5 = 0,75x$$

$$x = 2$$

$$f'''(2) = 0,75 > 0 \Rightarrow R-L-K$$

$$f(2) = 2 \quad W(2|2)_{R-L-K}$$



3. Aufgabe

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$$

$$f'(x) = 2x^2 + 4x \quad f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

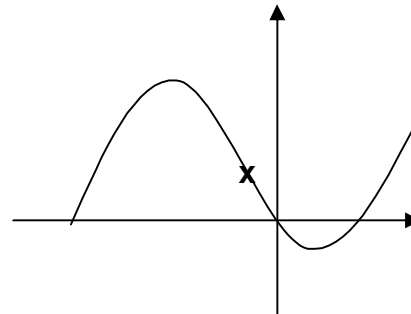
$$f''(x) = 4x + 4$$

$$f'''(x) = 4$$

$$0 = 4x + 4 \quad x = -1 \quad f'''(-1) = 4 > 0 \Rightarrow R-L-K$$

$$f(-1) = \frac{4}{3} \quad W_{R-L}(1|1,3)$$

Da der Wendepunkt eine Rechts-Links-Krümmung aufweist, liegt vor dem Wendepunkt ein Hochpunkt (Rechtskrümmung) und danach ein Tiefpunkt (Linkskrümmung). Somit zeichnet man den Wendepunkt ein und hat den ungefähren Verlauf der Funktion.



4. Aufgabe

a) Da $t(x)$ gegeben ist, kann man mit dem x -Wert den zugehörigen y -Wert berechnen. Dann setzt man den Punkt in die Funktionsgleichung von $f(x)$ ein und berechnet a .

$$t(x) = 3x \text{ also } t(-2) = -6 \Rightarrow P(-2|-6)$$

$$f(x) = ax^3 + 0,25x^2 + x - 3 \quad P(-2|-6)$$

$$-6 = a \cdot (-2)^3 + 0,25 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3$$

$$-6 = -8a - 4$$

$$-2 = -8a$$

$$0,25 = a$$

$$\Rightarrow f(x) = 0,25x^3 + 0,25x^2 + x - 3$$

$$t(x) = f(x)$$

$$3x = 0,25x^3 + 0,25x^2 + x - 3 \quad | - 3x$$

b) $0 = 0,25x^3 + 0,25x^2 - 2x - 3 \quad | : 0,25$

$$0 = x^3 + x^2 - 8x - 12$$

Polynomdivision mit $x_1 = -2$ führt zu $0 = x^2 - x - 6$ mit p-q ergibt sich $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.
Die Stelle -2 ist die doppelte Lösung der Tangente. Somit führt $x = 3$ zum weiteren Schnittpunkt.

$$t(3) = 9 \quad S_3(3|9) \quad (\text{Auch in } f(x) \text{ überprüfen.})$$

5. Aufgabe

Funktion und Stelle sind gegeben, Tangente erstellen, weiteren Schnittpunkt ermitteln

$$f(x) = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 8 \quad x = 1 \quad f(1) = 6,75 \quad y\text{-Wert}$$

$$f'(x) = 0,75x^2 - 3x \quad x = 1 \quad f'(1) = -2,25 \quad m$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$6,75 = -2,25 \cdot 1 + b$$

$$9 = b$$

$$\Rightarrow t(x) = -2,25x + 9$$

$$t(x) = f(x)$$

$$-2,25x + 9 = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 8 \quad | + 2,25x - 9$$

$$0 = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 2,25x - 1 \quad | : 0,25$$

$$\text{Polynomdivision mit } x_1 = 1 \text{ ergibt } 0 = x^2 - 5x + 4$$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

$$x_2 = 4 \quad \text{und} \quad x_3 = 1$$

Die Stelle $x = 1$ ist doppelte Lösung, also Tangente.

Die Stelle $x = 4$ liefert den gesuchten Punkt.

$$f(4) = 0 \quad P(4|0)$$

Im Punkt $P(4|0)$ trifft der Stein wieder auf die Straße.

(Es ist beabsichtigt, dass die Skizze nicht mit dem berechneten Wert übereinstimmt, sonst wäre man versucht, einfach die Nullstellen zu berechnen.)