Lösungen F 13

1. Aufgabe

$$x_1 = x_0$$
$$x_2 = x_0 + h$$
$$y_1 = f(x_0) = 0{,}4x_0^2 - 2x_0$$

a) $f(x) = 0{,}4x^2 - 2x$ $\qquad$ $y_2 = f(x_0 + h) = 0{,}4(x_0 + h)^2 - 2(x_0 + h)$

$$= 0{,}4(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 2x_0 - 2h$$

$$= 0{,}4x_0^2 + 0{,}8x_0h + 0{,}4h^2 - 2x_0 - 2h$$

$m = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - (x_0)}$ Einsetzen der vorher berechneten Terme

$$m = \frac{(\cancel{0{,}4x_0^2} + 0{,}8x_0h + 0{,}4h^2 - \cancel{2x_0} - 2h) - (\cancel{0{,}4x_0^2} - \cancel{2x_0})}{(\cancel{x_0} + h) - (\cancel{x_0})}$$

Zähler und Nenner getrennt zusammenfassen ($\cancel{}$)ergibt:

$m = \dfrac{0{,}8x_0h + 0{,}4h^2 - 2h}{h}$ jetzt kürzen von h, da h $\neq$ 0

$m = 0{,}8x_0 + 0{,}4h - 2$, dann Grenzwertbestimmung mit

$\lim\limits_{h \to 0} 0{,}8x_0 + 0{,}4h - 2$ lässt h null werden, also fällt 0,4h weg, und führt zu

$m = 0{,}8x_0 - 2$

$$x_1 = x_0$$
$$x_2 = x_0 + h$$
$$y_1 = f(x_0) = -5x_0^2 + 7$$

b) $f(x) = -5x^2 + 7$ $\qquad$ $y_2 = f(x_0 + h) = -5(x_0 + h)^2 + 7$

$$= -5(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 7$$

$$= -5x_0^2 - 10x_0h - 5h^2 + 7$$

$$m = \frac{(\cancel{-5x_0^2} - 10x_0h - 5h^2 + \cancel{7}) - (\cancel{-5x_0^2} + \cancel{7})}{(\cancel{x_0} + h) - (\cancel{x_0})}$$

$m = \dfrac{-10x_0h - 5h^2}{h}$ => $m = -10x_0 - 5h$

$\lim\limits_{h \to 0} -10x_0 - 5h$ => $m = -10x_0$

$$x_1 = x_0$$
$$x_2 = x_0 + h$$
$$y_1 = f(x_0) = 3x_0^2 + 0{,}25x_0 - 1$$

c) $f(x) = 3x^2 + 0{,}25x - 1$

$$y_2 = f(x_0 + h) = 3(x_0 + h)^2 + 0{,}25(x_0 + h) - 1$$
$$= 3(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 0{,}25x_0 + 0{,}25h - 1$$
$$= 3x_0^2 + 6x_0h + 3h^2 + 0{,}25x_0 + 0{,}25h - 1$$

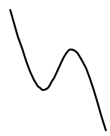
$$m = \frac{(\cancel{3x_0^2} + 6x_0h + 3h^2 + \cancel{0{,}25x_0} + 0{,}25h \cancel{-1}) - (\cancel{3x_0^2} + \cancel{0{,}25x_0} \cancel{-1})}{(\cancel{x_0} + h) - (\cancel{x_0})}$$

$$m = \frac{6x_0h + 3h^2 + 0{,}25h}{h} \quad => \quad m = 6x_0 + 3h + 0{,}25$$

$$\lim_{h \to 0} 6x_0 + 3h + 0{,}25 \quad => \quad m = 6x_0 + 0{,}25$$

<u>2. Aufgabe</u>

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$ 1. $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$; $x \to +\infty;\ f(x) \to -\infty$



2. gestaucht 3. PS

4. $S_y(0|0)$ $f(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \ \Big| : \left(-\frac{1}{4}\right)$

$0 = x^3 - 12x$ x ausklammern

$0 = x(x^2 - 12)$

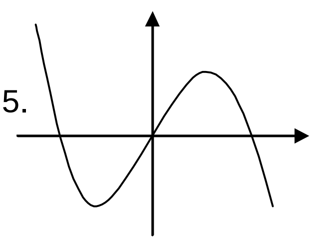
$x_1 = 0$ V $x^2 - 12 = 0 \ |+12$

$x^2 = 12 \ |\sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}5$ V $x_3 = -3{,}5$

$S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(3{,}5|0)$ $S_{x3}(-3{,}5|0)$

5.



b) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_1 = -4$ ergibt sich $f'(-4) = -9$ also $m_1 = -9$

c) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_2 = +1$ ergibt sich $f'(1) = 2{,}25$ also $m_2 = 2{,}25$

d) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -\frac{15}{4}$ ergibt sich

$$-\frac{15}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \ |-3$$
$$-\frac{27}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \ \Big| : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

Stellen = x-Werte

$9 = x^2 \ |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_1 = 3$ V $x_2 = -3$

e) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = 3$ ergibt sich

$3 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\big|-3$

$0 = -\frac{3}{4}x^2 \;\big|:\left(-\frac{3}{4}\right)$

$0 = x^2 \;\big|\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_{1/2} = 0$

f) $t(x) = m \cdot x + b$ => y-Wert zu x = 0 in der Ausgangsfunktion berechnen

$f(0) = 0$ mit m = 3 ergibt sich

$0 = 3 \cdot 0 + b$

$b = 0$ => $t(x) = 3x$

g) senkrecht = orthogonal => $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 3$ => $m_2 = -\frac{1}{3}$ Da es um den Ursprung geht, bleibt b = 0.

$n(x) = -\frac{1}{3}x$ Gleichung der Normalen

h) Steigungswinkel werden mit $\tan\alpha = m$ berechnet.

$\alpha = -83{,}65°$ => $\tan(-83{,}65) = -9$ also $m = -9$

$f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -9$ ergibt sich

$-9 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\big|-3$

$-12 = -\frac{3}{4}x^2 \;\big|:\left(-\frac{3}{4}\right)$

$16 = x^2 \;\big|\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_1 = 4$ V $x_2 = -4$

<u>3. Aufgabe</u>

a) $f'(x) = m \quad f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$6 = 2x^2 + 4x \;\big|-6$

$0 = 2x^2 + 4x - 6 \;\big|:(2)$

$0 = x^2 + 2x - 3$ p-q

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$x_1 = 1$ V $x_2 = -3$

$f(1) = \frac{8}{3}$ | $f(-3) = 0$

$t(x) = m \cdot x + b$ | $t(x) = m \cdot x + b$

$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$

$b = -\frac{10}{3}$ => $t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$

$0 = 6 \cdot (-3) + b$

$b = 18$ => $t_2(x) = 6x + 18$

b) $t_1(x) = f(x)$

$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \Big| -6x + \frac{10}{3}$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3} \quad \Big| : \frac{2}{3}$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (von Tangente vorgegeben)

$$\begin{array}{l} (x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x - 1) = x^2 + 4x - 5 \\ \underline{-(x^3 - 1x^2)} \\ \quad 4x^2 - 9x \\ \quad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\ \qquad -5x + 5 \\ \qquad \underline{-(-5x + 5)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$x^2 + 4x - 5 = 0$ p-q-Formel

$x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4+5}$

$x_2 = 1$

$x_3 = -5$

Die 1 ist eine doppelte Lösung und somit die Stelle, an der die Tangente anliegt. Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(-5) = -33\frac{1}{3}$ (und zur Überprüfung $t(-5) = -33\frac{1}{3}$)

$S_3(-5|-33{,}3)$

$t_2(x) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \Big| -6x - 18$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18 \quad \Big| : \frac{2}{3}$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$ (von Tangente vorgegeben)

$$\begin{array}{l} (x^3 + 3x^2 - 9x - 27) : (x + 3) = x^2 - 9 \\ \underline{-(x^3 + 3x^2)} \\ \quad 0 - 9x - 27 \\ \quad \underline{-(-9x - 27)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 3$

$x_3 = -3$

Die -3 ist doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit $f(3) = 36$ => $S_3(3|36)$

Die Überprüfung in t(x) sollte selbstverständlich sein.

4. Aufgabe

a) $f'(x) = x^3 - 2x$

$f'(1) = -1$

$f(1) = -2$

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = -1 \cdot 1 + b$ => $t_1(x) = -x - 1$

$b = -1$

$f'(-1) = 1$

$f(-1) = -2$

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = 1 \cdot (-1) + b$ => $t_2(x) = x - 1$

$b = -1$

b) Da beide Tangenten den gleichen y-Achsenabschnitt (S_y) besitzen, schneiden sie sich dort. $S(0|-1)$

c) $t_1(x) = f(x)$

$-x-1 = 0{,}25x^4 - x^2 - 1{,}25 \quad |+x+1$

$0 = 0{,}25x^4 + 0x^3 - x^2 + x - 0{,}25 \quad |:0{,}25$ $\qquad +0x^3$ einfügen wegen Polynomdivision

$0 = x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

Hier müssen zwei Polynomdivisionen durchgeführt werden, um eine quadratische Gleichung zu erhalten. Die Teiler sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$, da eine Tangente ja eine doppelte Lösung liefert.

Nach der ersten Polynomdivision erhält man: $0 = x^3 + x^2 - 3x + 1$

Nach der zweiten Polynomdivision: $0 = x^2 + 2x - 1$

Aus p-q ergibt sich: $x_3 = 0{,}4$ und $x_4 = -2{,}4$

$t_1(0{,}4) = -1{,}4 \qquad S_3(0{,}4|-1{,}4)$

$t_1(-2{,}4) = 1{,}4 \qquad S_4(-2{,}4|1{,}4)$

Berechnet man die y-Werte in f(x) ergeben sich kleine Abweichungen, da die x-Werte gerundet wurden.

Da die Funktion Achsensymmetrie aufweist, kann man die beiden Schnittpunkte einfach an der y-Achse spiegeln, indem man nur die Vorzeichen der x-Werte ändert. Für $t_2(x)$ gilt also: $S_3(-0{,}4|-1{,}4)$ $S_4(+2{,}4|1{,}4)$

5. Aufgabe

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, das heißt, für jeden x-Wert ist der y-Wert 4.
Daher erhält man den vollständigen Punkt (2l4).
Diesen kann man nun in f(x) einsetzten und a berechnen.

$f(x) = ax^3 + 3x$

$4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$

$4 = 8a + 6$ $\qquad$ Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$

$-2 = 8a$

$-0{,}25 = a$