Lösungen E 18

Berechnen = alle Rechenwege ersichtlich darstellen
Hier wird aus Platzgründen manchmal abgekürzt.

1. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$

$x = 0 \qquad f(0) = -1 \qquad S_y(0|-1)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \,\Big|\, : \left(-\frac{1}{8}\right)$

$0 = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ Polynomdivision oder Horner Schema mit $x_{N1} = 1$ ergibt

$0 = x^2 - 2x - 8$ pq-Formel liefert $x_{N2} = 4$ und $x_{N3} = -2$

$S_{x1}(1|0) \qquad S_{x2}(4|0) \qquad S_{x30}(-2|0)$

Ableitungen

$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \,\Big|\, : \left(-\frac{3}{8}\right)$ pq-Formel liefert $x_{E1} \approx 2{,}73$ und $x_{E2} \approx -0{,}73$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(2{,}73) \approx -1{,}30 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-0{,}73) \approx 1{,}30 > 0 \Rightarrow T$

3. Schritt

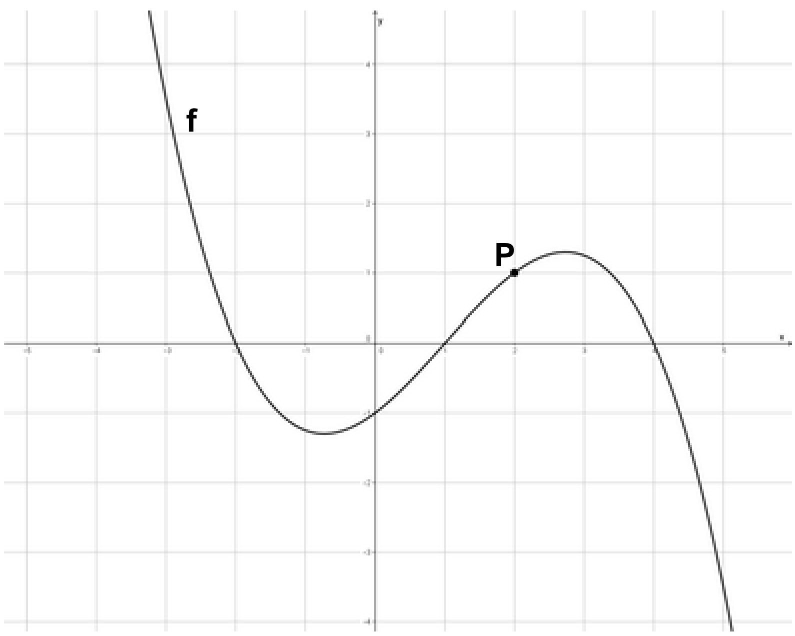
$f(2{,}73) \approx 1{,}30 \qquad H(2{,}73|1{,}30)$

$f(-0{,}73) \approx -1{,}30 \qquad T(-0{,}73|1{,}30)$

b) $f(2) = 1 \qquad P(2|1)$

Einsetzen des x-Wertes in die Ausgangsfunktion!

c)



d) $f'(x) = m$

$f'(0) = \frac{3}{4} \qquad m_1 = \frac{3}{4}$

$f'(2) = \frac{3}{4} \qquad m_2 = \frac{3}{4}$

e) $t(x) = m \cdot x + b$

$x_1 = 0 \qquad m_1 = \frac{3}{4} \qquad f(0) = -1$ alle Werte einsetzen

$-1 = \frac{3}{4} \cdot 0 + b \qquad t(x_1) = \frac{3}{4}x - 1$

$b = -1$

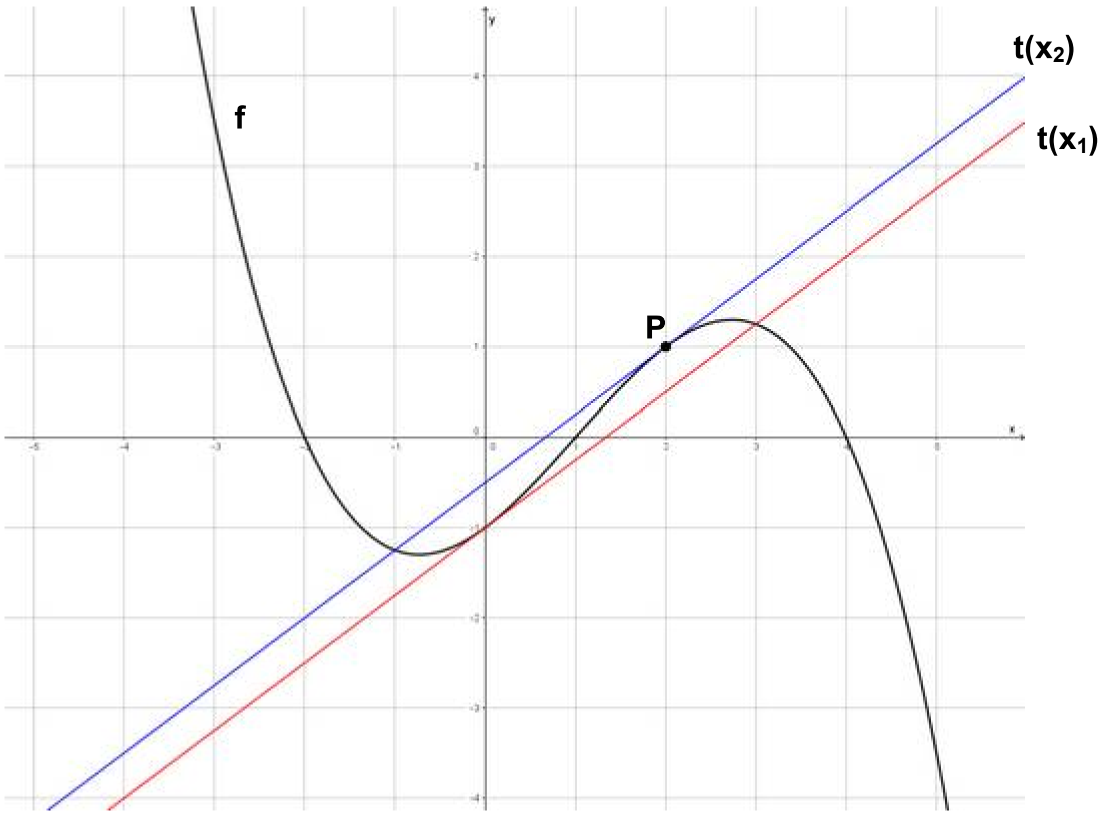
$t(x) = m \cdot x + b$

$x_2 = 2 \qquad m_1 = \frac{3}{4} \qquad f(2) = 1$ alle Werte einsetzen

$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b \qquad t(x_2) = \frac{3}{4}x - 0{,}5$

$b = -0{,}5$

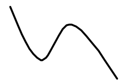
f)



2. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{array}{l} x \to -\infty; f(x) \to +\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to -\infty \end{array}$ (Der Graph kommt von oben und geht nach unten.) 

3. Punktsymmetrie (PS), da nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \;\Big|\, : \left(-\frac{1}{4}\right)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^3 - 12x$

$0 = x(x^2 - 12)$

$x_{N1} = 0 \qquad x^2 - 12 = 0$

$x_{N2} \approx 3{,}46 \qquad x_{N3} \approx -3{,}46$

$S_{x1}(0|0) \quad S_{x2}(3{,}46|0) \quad S_{x3}(-3{,}46|0)$

Ableitungen

$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

$f''(x) = -\frac{3}{2}x$

$f'''(x) = -\frac{3}{2}$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\Big|\, : \left(-\frac{3}{4}\right)$

$0 = x^2 - 4$

$x_{E1} = 2$

$x_{E2} = -2$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(2) = -3 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-2) = 3 > 0 \Rightarrow T$

3. Schritt

$f(2) = 4 \qquad H(2|4)$

$f(-2) = -4 \qquad T(-2|-4)$

$M_1 =]-\infty;-2]$ monoton fallend

$M_2 = [-2;+2]$ monoton steigend

$M_3 = [2;+\infty[$ monoton fallend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -\frac{3}{2}x$

$0 = x_W$

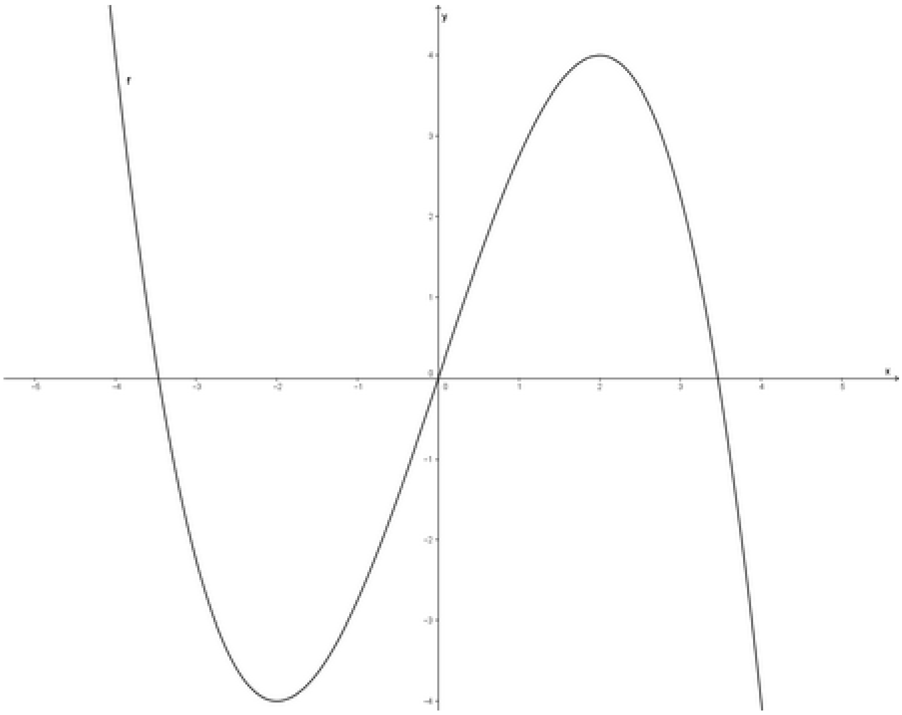
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow L-R-K$

3. Schritt

$f(0) = 0 \qquad W_{L-R}(0|0)$

7. Zeichnung



b) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_1 = -4$ ergibt sich $f'(-4) = -9$ also $m_1 = -9$

c) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_2 = +1$ ergibt sich $f'(1) = 2{,}25$ also $m_2 = 2{,}25$

d) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -\frac{15}{4}$ ergibt sich

$$-\frac{15}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\Big|\, -3$$

$$-\frac{27}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \;\Big|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$$

Stellen = x-Werte

$$9 = x^2 \;\Big|\sqrt{}$$

daraus ergibt sich $x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

e) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = 3$ ergibt sich

$$3 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\Big|\, -3$$

$$0 = -\frac{3}{4}x^2 \;\Big|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$0 = x^2 \;\Big|\sqrt{}$$

daraus ergibt sich $x_{1/2} = 0$

f) $t(x) = m \cdot x + b$ => y-Wert zu $x = 0$ in der Ausgangsfunktion berechnen

$f(0) = 0$ mit m = 3 ergibt sich durch Einsetzen

$0 = 3 \cdot 0 + b$

$b = 0$ => $t(x) = 3x$

g) senkrecht = orthogonal => $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 3$ => $m_2 = -\frac{1}{3}$ Da die Tangente im Ursprung anliegt, bleibt b = 0.

$$n(x) = -\frac{1}{3}x \quad \text{Gleichung der Normalen}$$

h) Steigungswinkel werden mit $\tan(\alpha) = m$ berechnet.

$\alpha = -83{,}65°$ => $\tan(-83{,}65) \approx -9$ also $m = -9$

$f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -9$ ergibt sich

$-9 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \quad | -3$

$-12 = -\frac{3}{4}x^2 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$

$16 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_1 = 4$ $x_2 = -4$

3. Aufgabe

a) $f'(x) = m \quad f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$6 = 2x^2 + 4x \quad | -6$

$0 = 2x^2 + 4x - 6 \quad | : (2)$

$0 = x^2 + 2x - 3$ p-q

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$

$x_1 = 1$	$x_2 = -3$
$f(1) = \frac{8}{3}$	$f(-3) = 0$
$t(x) = m \cdot x + b$	$t(x) = m \cdot x + b$
$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$ $b = -\frac{10}{3}$ => $t(x_1) = 6x - \frac{10}{3}$	$0 = 6 \cdot (-3) + b$ $b = 18$ => $t(x_2) = 6x + 18$

b) $t(x_1) = f(x)$

$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \left| -6x + \frac{10}{3}\right.$ $\qquad 0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3} \quad \left| : \frac{2}{3}\right.$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (von Tangente vorgegeben) ergibt

$x^2 + 4x - 5 = 0$ p-q-Formel liefert $x_2 = 1$ $x_3 = -5$

$x = 1$ ist eine doppelte Lösung, somit die Stelle, an der die Tangente anliegt (Berührstelle). Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(-5) = -33\frac{1}{3}$ (und zur Überprüfung $t(-5) = -33\frac{1}{3}$) => $S_3(-5|-33{,}33)$

$t(x_2) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \vert -6x - 18$ $\qquad 0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18 \quad \vert : \frac{2}{3}$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$ (von Tangente vorgegeben) ergibt

$x^2 - 9 = 0$ mit Wurzel ziehen erhält man $x_2 = 3$ $x_3 = -3$

$x = -3$ ist eine doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit
$f(3) = 36$ => $S_3(3|36)$ Die Überprüfung in t(x) sollte selbstverständlich sein.

4. Aufgabe

1. Möglichkeit
$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente,
also ist für jeden x-Wert der **y-Wert 4**.
Man erhält den vollständigen Punkt (2I4).
Durch Einsetzten in f(x) erhält man a.

$f(x) = ax^3 + 3x$

$4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$

$4 = 8a + 6$

$-2 = 8a$

$-0{,}25 = a$

2. Möglichkeit
$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente,
also ist die **Steigung** $m = 0$.
Bildet man die erste Ableitung und setzt
x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f'(x) = 3ax^2 + 3$

$0 = 3a \cdot 2^2 + 3$

$0 = 12a + 3$

$-3 = 12a$

$-0{,}25 = a$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$.