

Lösungen E 17

Berechnen = alle Rechenwege ersichtlich darstellen
Hier wird aus Platzgründen manchmal abgekürzt.

1. Aufgabe

$$a) f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$$

$$x = 0 \quad f(0) = -1 \quad S_y(0|-1)$$

$$f(x_N) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \quad \left| : \left(-\frac{1}{8}\right) \right.$$

$$0 = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \quad \text{Polynomdivision oder Horner Schema mit } x_{N1} = 1 \text{ ergibt}$$

$$0 = x^2 - 2x - 8 \quad \text{pq-Formel liefert } x_{N2} = 4 \text{ und } x_{N3} = -2$$

$$S_{x1}(1|0) \quad S_{x2}(4|0) \quad S_{x30}(-2|0)$$

Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$1. \text{ Schritt } f'(x_E) = 0$$

$$0 = x^2 - 2x - 2 \quad 0 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \quad \left| : \left(-\frac{3}{8}\right) \right.$$

pq-Formel liefert $x_{E1} \approx 2,73$

und $x_{E2} \approx -0,73$

$$2. \text{ Schritt } f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$$

$$f''(2,73) \approx -1,30 < 0 \Rightarrow H$$

$$f''(-0,73) \approx 1,30 > 0 \Rightarrow T$$

3. Schritt

$$f(2,73) \approx 1,30$$

$$H(2,73|1,30)$$

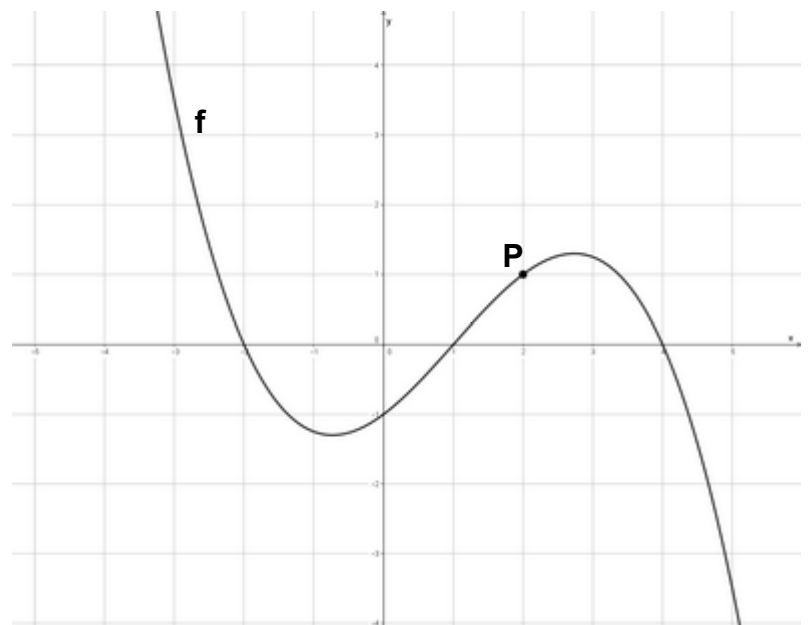
$$f(-0,73) \approx -1,30$$

$$T(-0,73|-1,30)$$

$$b) f(2) = 1 \quad P(2|1)$$

Einsetzen des x-Wertes in die Ausgangsfunktion!

c)



d) $f'(x) = m$

$$f'(0) = \frac{3}{4} \quad m_1 = \frac{3}{4}$$

$$f'(2) = \frac{3}{4} \quad m_2 = \frac{3}{4}$$

e) $t(x) = m \cdot x + b$

$$x_1 = 0 \quad m_1 = \frac{3}{4} \quad f(0) = -1 \quad \text{alle Werte einsetzen}$$

$$-1 = \frac{3}{4} \cdot 0 + b \quad t(x_1) = \frac{3}{4}x - 1$$

$$b = -1$$

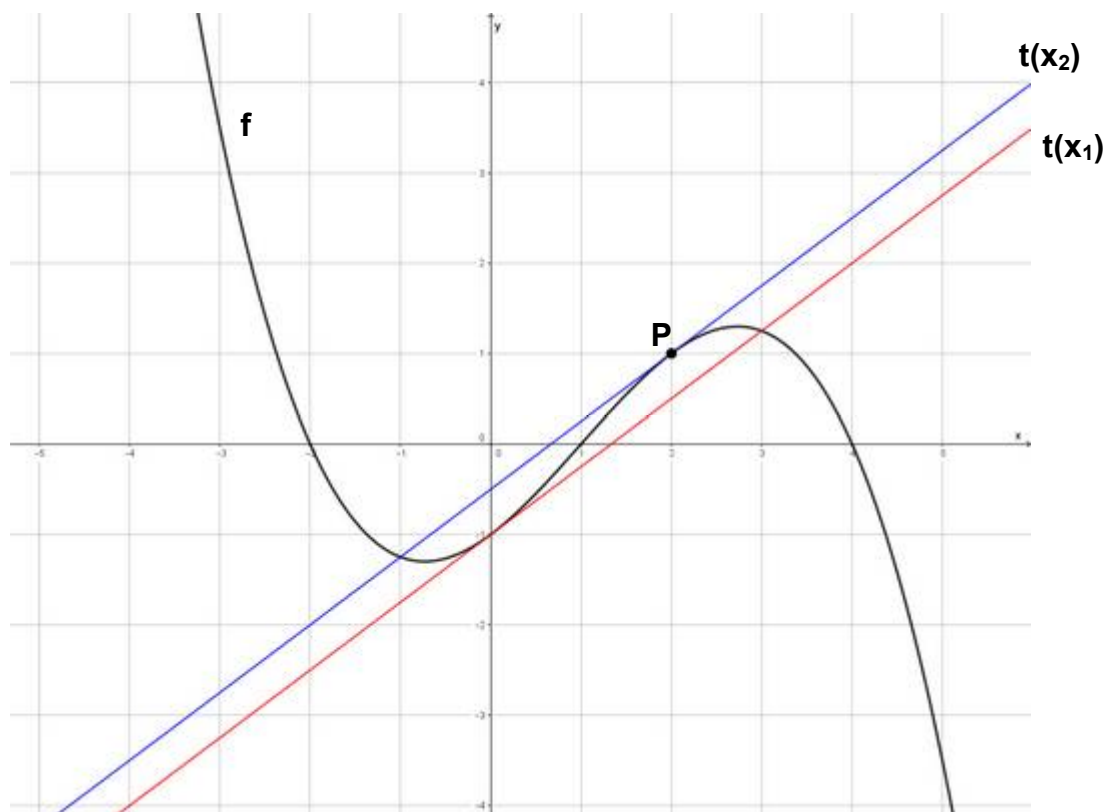
$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$x_2 = 2 \quad m_1 = \frac{3}{4} \quad f(2) = 1 \quad \text{alle Werte einsetzen}$$

$$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b \quad t(x_2) = \frac{3}{4}x - 0,5$$

$$b = -0,5$$

f)



2. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow -\infty$ (Der Graph kommt von oben und geht nach unten.)



3. Punktsymmetrie (PS), da nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$$x = 0 \quad f(0) = 0 \quad S_y(0|0)$$

$$f(x_N) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \left| : \left(-\frac{1}{4}\right) \right. \quad (\text{Normalisieren nur, wenn } = 0 \text{ steht})$$

$$0 = x^3 - 12x$$

$$0 = x(x^2 - 12)$$

$$x_{N1} = 0 \quad x^2 - 12 = 0$$

$$x_{N2} \approx 3,46 \quad x_{N3} \approx -3,46$$

$$S_{x1}(0|0) \quad S_{x2}(3,46|0) \quad S_{x3}(-3,46|0)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

Ableitungen $f''(x) = -\frac{3}{2}x$

$$f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \left| : \left(-\frac{3}{4}\right) \right.$$

$$f''(2) = -3 < 0 \Rightarrow H$$

$$f(2) = 4 \quad H(2|4)$$

$$f''(-2) = 3 > 0 \Rightarrow T$$

$$f(-2) = -4 \quad T(-2|-4)$$

$$0 = x^2 - 4$$

$$x_{E1} = 2$$

$$M_1 =]-\infty; -2] \quad \text{monoton fallend}$$

$$x_{E2} = -2$$

$$M_2 = [-2; +2] \quad \text{monoton steigend}$$

$$M_3 = [2; +\infty[\quad \text{monoton fallend}$$

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

3. Schritt

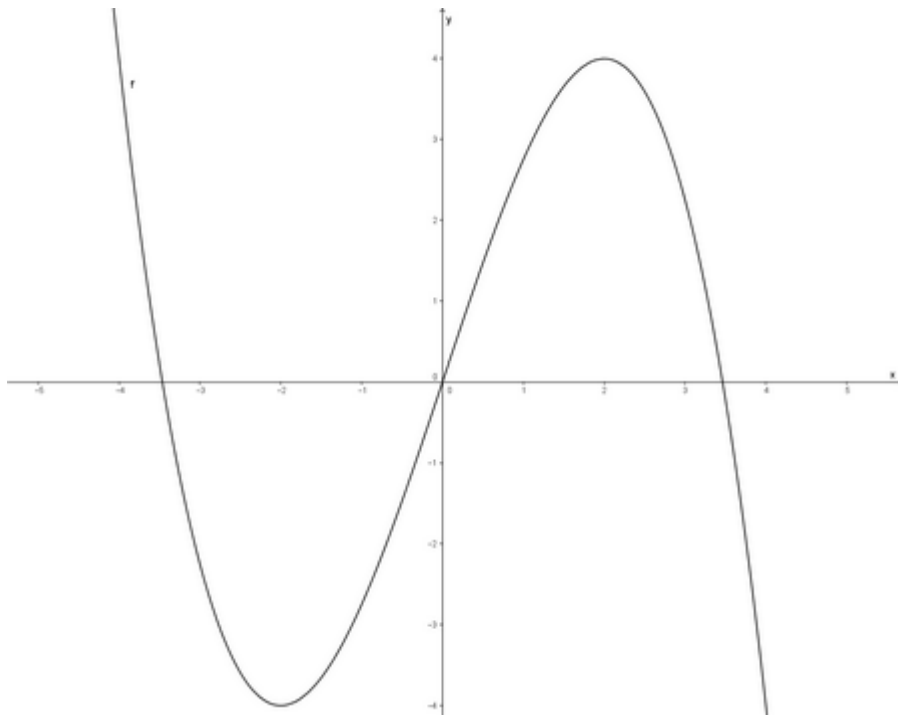
$$0 = -\frac{3}{2}x$$

$$f'''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow L-R-K$$

$$f(0) = 0 \quad W_{L-R}(0|0)$$

$$0 = x_W$$

7. Zeichnung



b) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_1 = -4$ ergibt sich $f'(-4) = -9$ also $m_1 = -9$

c) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_2 = +1$ ergibt sich $f'(1) = 2,25$ also $m_2 = 2,25$

d) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -\frac{15}{4}$ ergibt sich

$$-\frac{15}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \quad | -3$$

$$-\frac{27}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

Stellen = x-Werte

$$9 = x^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

daraus ergibt sich $x_1 = 3$ $x_2 = -3$

e) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = 3$ ergibt sich

$$3 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \quad | -3$$

$$0 = -\frac{3}{4}x^2 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$0 = x^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

daraus ergibt sich $x_{1/2} = 0$

f) $t(x) = m \cdot x + b$ \Rightarrow y-Wert zu $x = 0$ in der Ausgangsfunktion berechnen

$$f(0) = 0$$

mit $m = 3$ ergibt sich durch Einsetzen

$$0 = 3 \cdot 0 + b$$

$$\Rightarrow t(x) = 3x$$

$$b = 0$$

g) senkrecht = orthogonal $\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

$$m_1 = 3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} \quad \text{Da die Tangente im Ursprung anliegt, bleibt } b = 0.$$

$$n(x) = -\frac{1}{3}x \quad \text{Gleichung der Normalen}$$

h) Steigungswinkel werden mit $\tan(\alpha) = m$ berechnet.

$$\alpha = -83,65^\circ \Rightarrow \tan(-83,65) = -9 \quad \text{also } m = -9$$

$$f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \quad \text{mit } m = -9 \quad \text{ergibt sich}$$

$$-9 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \quad | -3$$

$$-12 = -\frac{3}{4}x^2 \quad | : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$16 = x^2 \quad | \sqrt{\quad} \quad \text{daraus ergibt sich } x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

3. Aufgabe

a) $f'(x) = m \quad f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$$6 = 2x^2 + 4x \quad | -6$$

$$0 = 2x^2 + 4x - 6 \quad | : (2)$$

$$0 = x^2 + 2x - 3 \quad \text{p-q}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -3$$

$$f(1) = \frac{8}{3}$$

$$f(-3) = 0$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$t(x) = m \cdot x + b$$

$$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$$

$$0 = 6 \cdot (-3) + b$$

$$b = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow t_2(x) = 6x + 18$$

$$b = 18$$

b) $t_1(x) = f(x)$

$$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad | -6x + \frac{10}{3}$$

$$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3} \quad | : \frac{2}{3}$$

$$0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (von Tangente vorgegeben) ergibt

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

p-q-Formel liefert $x_2 = 1 \quad x_3 = -5$

$x = 1$ ist eine doppelte Lösung, somit die Stelle, an der die Tangente anliegt (Berührstelle). Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzen.

$$f(-5) = -33\frac{1}{3} \quad (\text{und zur Überprüfung } t(-5) = -33\frac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad S_3(-5 | -33,3)$$

$$t_2(x) = f(x)$$

$$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad | -6x - 18$$

$$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18 \quad | : \frac{2}{3}$$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$ (von Tangente vorgegeben) ergibt
 $x^2 - 9 = 0$ mit Wurzel ziehen erhält man $x_2 = 3$ $x_3 = -3$

$x = -3$ ist eine doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit

$f(3) = 36 \Rightarrow S_3(3|36)$ Die Überprüfung in $t(x)$ sollte selbstverständlich sein.

4. Aufgabe

1. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente,

also ist für jeden x -Wert der **y-Wert 4**.

Man erhält den vollständigen Punkt (2|4).

Durch Einsetzen in $f(x)$ erhält man a .

$$f(x) = ax^3 + 3x$$

$$4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$$

$$4 = 8a + 6$$

$$-2 = 8a$$

$$-0,25 = a$$

2. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente,

also ist die **Steigung** $m = 0$.

Bildet man die erste Ableitung und setzt

x -Wert und Steigung ein, erhält man a .

$$f'(x) = 3ax^2 + 3$$

$$0 = 3a \cdot 2^2 + 3$$

$$0 = 12a + 3$$

$$-3 = 12a$$

$$-0,25 = a$$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x) = -0,25x^3 + 3x$.