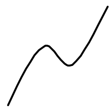
# Lösungen E 15

| |
|---|
| 1. Definitionsbereich<br>2. Verlauf der Funktion<br>3. Symmetrie<br>4. $S_x$ / $S_y$<br>5. Zeichnung |

<u>1. Aufgabe</u>

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{4}x+3$$

**1.** $D=R$ **2.** $x\to-\infty;\ f(x)\to-\infty$ / $x\to+\infty;\ f(x)\to+\infty$  **3.** KS **4.** $S_y(0|3)$ $f(x)=0$

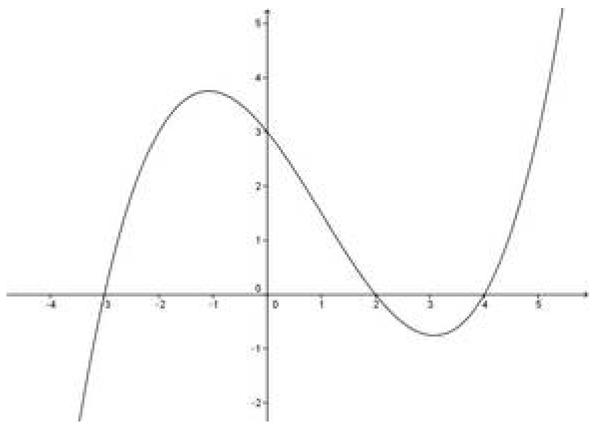
$$0=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{4}x+3 \,\Big|\, :\frac{1}{8}$$

$0=x^3-3x^2-10x+24$ Polynomdivision mit $x_1=2$ führt zu

$0=x^2-x-12$ p-q-Formel ergibt $x_2=4$ und $x_3=-3$

$S_{x1}(2|0)$ $S_{x2}(4|0)$ $S_{x3}(-3|0)$

**5.** Zeichnung



b)

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{4}x+3$$

$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{4}$$

$$f^4(x)=0$$

c)

$f'(x)=m$ und $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$

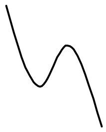
mit $x_1=4$ ergibt sich $f'(4)=1{,}75$ also $m_1=1{,}75$

mit $x_2=-2$ ergibt sich $f'(-2)=1{,}75$ also $m_2=1{,}75$

2. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

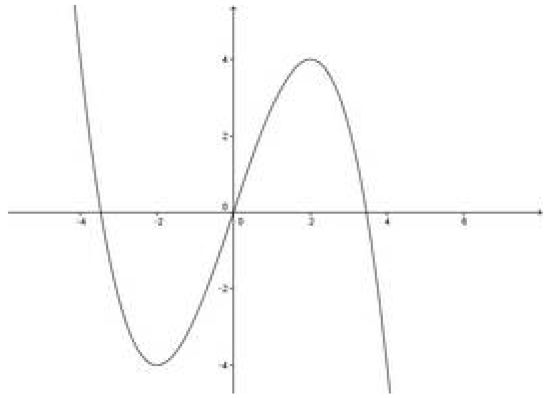
**1.** $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$ <br> $x \to +\infty;\ f(x) \to -\infty$



**3.** PS **4.** $S_y(0|0)$ $f(x) = 0$

**4.** $S_y(0|0)$ $f(x) = 0$

**5.** Zeichnung



$0 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \ \Big|: \left(-\frac{1}{4}\right)$

$0 = x^3 - 12x$ x ausklammern

$0 = x(x^2 - 12)$

$x_1 = 0$ V $x^2 - 12 = 0 \ |+12$

$x^2 = 12 \ |\sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}5$ V $x_3 = -3{,}5$

$S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(3{,}5|0)$ $S_{x3}(-3{,}5|0)$

b) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_1 = -4$ ergibt sich $f'(-4) = -9$ also $m_1 = -9$

c) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_2 = +1$ ergibt sich $f'(1) = 2{,}25$ also $m_2 = 2{,}25$

d) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -\frac{15}{4}$ ergibt sich

$-\frac{15}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \ |-3$

$-\frac{27}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \ \Big|: \left(-\frac{3}{4}\right)$ Stellen = x-Werte

$9 = x^2 \ |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_1 = 3$ V $x_2 = -3$

e) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = 3$ ergibt sich

$3 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \ |-3$

$0 = -\frac{3}{4}x^2 \ \Big|: \left(-\frac{3}{4}\right)$

$0 = x^2 \ |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_{1/2} = 0$

f) $t(x) = m \cdot x + b$ => y-Wert zu x = 0 in der Ausgangsfunktion berechnen

$f(0) = 0$ mit m = 3 ergibt sich

$0 = 3 \cdot 0 + b$

$b = 0$ => $t(x) = 3x$

g) senkrecht = orthogonal => $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 3$ => $m_2 = -\frac{1}{3}$ Da es um den Ursprung geht, bleibt b = 0.

$n(x) = -\frac{1}{3}x$ Gleichung der Normalen

h) Steigungswinkel werden mit $\tan\alpha = m$ berechnet.

$\alpha = -83{,}65°$ => $\tan(-83{,}65) = -9$ also $m = -9$

$f'(x) = m$ $\quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -9$ ergibt sich

$$-9 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\Big|\, -3$$

$$-12 = -\frac{3}{4}x^2 \;\Big|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$16 = x^2 \;\Big|\sqrt{\;}$ daraus ergibt sich $x_1 = 4$ V $x_2 = -4$

<u>3. Aufgabe</u>

a) $f'(x) = m$ $\quad f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$$6 = 2x^2 + 4x \;\Big|\, -6$$

$$0 = 2x^2 + 4x - 6 \;\Big|\, :(2)$$

$0 = x^2 + 2x - 3$ p-q

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$x_1 = 1$ V $x_2 = -3$

| | |
|---|---|
| $x_1 = 1$ | $x_2 = -3$ |
| $f(1) = \frac{8}{3}$ | $f(-3) = 0$ |
| $t(x) = m \cdot x + b$ | $t(x) = m \cdot x + b$ |
| $\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$ | $0 = 6 \cdot (-3) + b$ |
| $b = -\frac{10}{3}$ => $t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$ | $b = 18$ => $t_2(x) = 6x + 18$ |

b) $t_1(x) = f(x)$

$$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \;\Big|\, -6x + \frac{10}{3}$$

$$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3} \;\Big|\, :\frac{2}{3}$$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (von Tangente vorgegeben)

$$(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x - 1) = x^2 + 4x - 5$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - 1x^2) \\ \hline \quad 4x^2 - 9x \\ \quad -(4x^2 - 4x) \\ \hline \qquad -5x + 5 \\ \qquad -(-5x + 5) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$x^2 + 4x - 5 = 0$ p-q-Formel

$$x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4+5}$$

$x_2 = 1$

$x_3 = -5$

x = 1 ist eine doppelte Lösung und somit die Stelle, an der die Tangente anliegt. Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(-5) = -33\frac{1}{3}$ (und zur Überprüfung $t(-5) = -33\frac{1}{3}$) => $S_3(-5 \,|\, -33{,}3)$

$t_2(x) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad | -6x - 18$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18 \quad | : \frac{2}{3}$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$ (von Tangente vorgegeben)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 9x - 27) : (x + 3) = x^2 - 9 \\
\underline{-(x^3 + 3x^2)} \\
\quad 0 - 9x - 27 \\
\quad \underline{-(-9x - 27)} \\
\quad\quad 0
\end{array}
$$

$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 3$

$x_3 = -3$

x = -3 ist doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit $f(3) = 36$ => $S_3(3|36)$

Die Überprüfung in t(x) sollte selbstverständlich sein.

<u>4. Aufgabe</u>

a) $f'(x) = x^3 - 2x$

$f'(1) = -1$

$f(1) = -2$

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = -1 \cdot 1 + b$

$b = -1$ => $t_1(x) = -x - 1$

$f'(-1) = 1$

$f(-1) = -2$

$t(x) = m \cdot x + b$

$-2 = 1 \cdot (-1) + b$

$b = -1$ => $t_2(x) = x - 1$

b) Da beide Tangenten den gleichen y-Achsenabschnitt ($S_y$) besitzen, schneiden sie sich dort. $S(0|-1)$

c) $t_1(x) = f(x)$

$-x - 1 = 0{,}25x^4 - x^2 - 1{,}25 \quad | + x + 1$

$0 = 0{,}25x^4 + 0x^3 - x^2 + x - 0{,}25 \quad | : 0{,}25$ $\qquad + 0x^3$ einfügen wegen Polynomdivision

$0 = x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

Hier müssen zwei Polynomdivisionen durchgeführt werden, um eine quadratische Gleichung zu erhalten.

Die Teiler sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ , da eine Tangente ja eine doppelte Lösung liefert.

$S_{1/2}(1|-2)$

Nach der ersten Polynomdivision erhält man: $0 = x^3 + x^2 - 3x + 1$

Nach der zweiten Polynomdivision: $0 = x^2 + 2x - 1$

Aus p-q ergibt sich: $x_3 = 0{,}4$ und $x_4 = -2{,}4$

$t_1(0{,}4) = -1{,}4$ $\qquad S_3(0{,}4|-1{,}4)$

$t_1(-2{,}4) = 1{,}4$ $\qquad S_4(-2{,}4|1{,}4)$

Berechnet man die y-Werte in f(x), ergeben sich kleine Abweichungen, da die x-Werte gerundet wurden.

Da die Funktion Achsensymmetrie aufweist, kann man die beiden Schnittpunkte einfach an der y-Achse spiegeln, indem man nur die Vorzeichen der x-Werte ändert. Für $t_2(x)$ gilt also: $S_3(-0{,}4|-1{,}4)$ $S_4(+2{,}4|1{,}4)$ und natürlich $S_{1/2}(-1|-2)$

5. Aufgabe

1. Möglichkeit

$t(x)=4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist für jeden x-Wert der y-Wert 4. Man erhält den vollständigen Punkt (2l4). Durch Einsetzten in f(x) erhält man a.

$f(x)=ax^3+3x$

$4=a\cdot 2^3+3\cdot 2$

$4=8a+6$

$-2=8a$

$-0{,}25=a$

2. Möglichkeit

$t(x)=4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist die Steigung $m=0$. Bildet man die erste Ableitung und setzt x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f'(x)=3ax^2+3$

$0=3a\cdot 2^2+3$

$0=12a+3$

$-3=12a$

$-0{,}25=a$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x)=-0{,}25x^3+3x$.