Lösungen E 14

1. Aufgabe

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{4}x+3$$

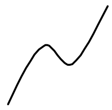
$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{4}$$

1. Definitionsbereich
2. Verlauf der Funktion
3. Symmetrie
4. S_x / S_y
5. Extrempunkte
6. Wendepunkte
7. Zeichnung

1. $D=R$ **2.** $x\to-\infty;\ f(x)\to-\infty$; $x\to+\infty;\ f(x)\to+\infty$



3. KS **4.** $S_y(0|3)$ $f(x)=0$

$$0=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{4}x+3 \Big| :\frac{1}{8}$$

$0=x^3-3x^2-10x+24$ Polynomdivision mit $x_1=2$ führt zu

$0=x^2-x-12$ p-q-Formel ergibt $x_2=4$ und $x_3=-3$

$S_{x1}(2|0)$ $S_{x2}(4|0)$ $S_{x3}(-3|0)$

5. Extrempunkte $f'(x)=0 \ \wedge\ f''(x)\neq 0$

$0=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\Big| :\frac{3}{8}$ $f''(3{,}1)=1{,}6>0\Rightarrow T$

$0=x^2-2x-\frac{10}{3}$ $f''(-1{,}1)=-1{,}6<0\Rightarrow H$

$x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+\frac{10}{3}}$ $f(3{,}1)=-0{,}8$ $T(3{,}1|-0{,}8)$

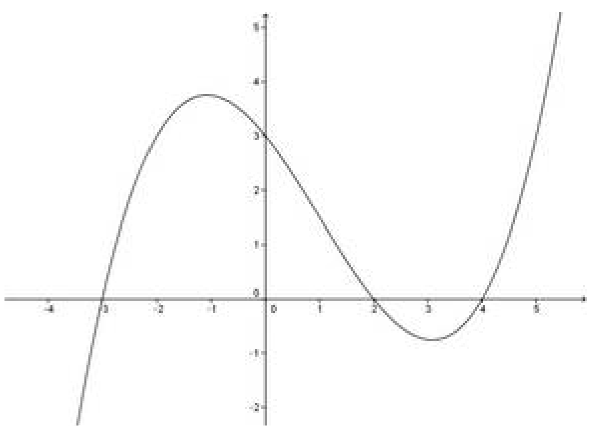
$x_1=3{,}1$ V $x_2=-1{,}1$ $f(-1{,}1)=3{,}8$ $H(-1{,}1|3{,}8)$

6. Wendepunkte $f''(x)=0 \ \wedge\ f'''(x)\neq 0$

$0=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ $f'''(1)=\frac{3}{4}>0\Rightarrow R-L-K$

$x=1$ $f(1)=1{,}5$ $W_{R-L}(1|1{,}5)$

7. Zeichnung



2. Aufgabe

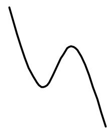
a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

$f''(x) = -\frac{3}{2}x$

$f'''(x) = -\frac{3}{2}$

1. $D = R$ **2.** $x \to -\infty;\ f(x) \to +\infty$ / $x \to +\infty;\ f(x) \to -\infty$



3. PS **4.** $S_y(0|0)$ $f(x) = 0$

$0 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \ \Big|:\left(-\frac{1}{4}\right)$

$0 = x^3 - 12x$ x ausklammern

$0 = x(x^2 - 12)$

$x_1 = 0$ V $x^2 - 12 = 0 \ |+12$

$x^2 = 12 \ |\sqrt{\ }$

$x_2 = 3{,}5$ V $x_3 = -3{,}5$

$S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(3{,}5|0)$ $S_{x3}(-3{,}5|0)$

5. Extrempunkte $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x) \neq 0$

$0 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \Big|:\left(-\frac{3}{4}\right)$ $f''(2) = -3 < 0 \Rightarrow H$

$0 = x^2 - 4$ $f''(-2) = 3 > 0 \Rightarrow T$

$x_1 = 2$ V $x_2 = -2$ $f(2) = 4$ $H(2|4)$

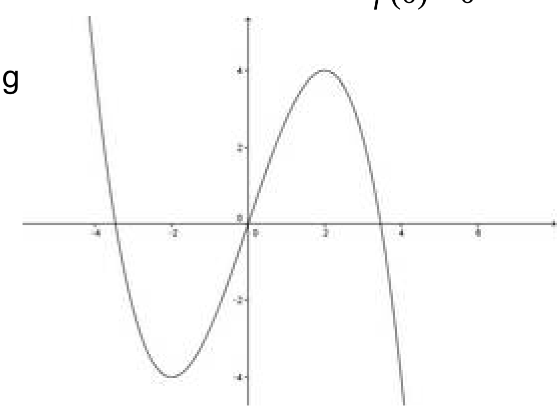
$f(-2) = -4$ $T(-2|-4)$

6. Wendepunkte $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x) \neq 0$

$0 = -\frac{3}{2}x$ $f'''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow L-R-K$

$0 = x$ $f(0) = 0$ $W_{L-R}(0|0)$

7. Zeichnung



b) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_1 = -4$ ergibt sich $f'(-4) = -9$ also $m_1 = -9$

c) $f'(x) = m$ $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $x_2 = +1$ ergibt sich $f'(1) = 2{,}25$ also $m_2 = 2{,}25$

d) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -\frac{15}{4}$ ergibt sich

$-\frac{15}{4} = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\big|\, -3$

$-\frac{27}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \;\big|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$ Stellen = x-Werte

$9 = x^2 \;\big|\sqrt{\;}$ daraus ergibt sich $x_1 = 3$ V $x_2 = -3$

e) $f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = 3$ ergibt sich

$3 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\big|\, -3$

$0 = -\frac{3}{4}x^2 \;\big|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$

$0 = x^2 \;\big|\sqrt{\;}$ daraus ergibt sich $x_{1/2} = 0$

f) $t(x) = m \cdot x + b$ => y-Wert zu x = 0 in der Ausgangsfunktion berechnen

$f(0) = 0$ mit m = 3 ergibt sich

$0 = 3 \cdot 0 + b$

$b = 0$ => $t(x) = 3x$

g) senkrecht = orthogonal => $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 3$ => $m_2 = -\frac{1}{3}$ Da es um den Ursprung geht, bleibt b = 0.

$n(x) = -\frac{1}{3}x$ Gleichung der Normalen

h) Steigungswinkel werden mit $\tan\alpha = m$ berechnet.

$\alpha = -83{,}65°$ => $\tan(-83{,}65) = -9$ also $m = -9$

$f'(x) = m \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ mit $m = -9$ ergibt sich

$-9 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\big|\, -3$

$-12 = -\frac{3}{4}x^2 \;\big|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$

$16 = x^2 \;\big|\sqrt{\;}$ daraus ergibt sich $x_1 = 4$ V $x_2 = -4$

<u>3. Aufgabe</u>

a) $f'(x) = m \quad f'(x) = 2x^2 + 4x$ mit $m = 6$ ergibt sich

$6 = 2x^2 + 4x \;\big|\, -6$

$0 = 2x^2 + 4x - 6 \;\big|\, :(2)$

$0 = x^2 + 2x - 3$ p-q

$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$x_1 = 1$ V $x_2 = -3$

$x_1 = 1$ | $x_2 = -3$
$f(1) = \frac{8}{3}$ | $f(-3) = 0$
$t(x) = m \cdot x + b$ | $t(x) = m \cdot x + b$

$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$

$b = -\frac{10}{3}$ => $t_1(x) = 6x - \frac{10}{3}$

$0 = 6 \cdot (-3) + b$

$b = 18$ => $t_2(x) = 6x + 18$

b) $t_1(x) = f(x)$

$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \left| -6x + \frac{10}{3} \right.$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3} \quad \left| : \frac{2}{3} \right.$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ Polynomdivision mit $x_1 = 1$ (von Tangente vorgegeben)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x - 1) = x^2 + 4x - 5 \\
\underline{-(x^3 - 1x^2)} \\
\quad 4x^2 - 9x \\
\quad \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
\qquad -5x + 5 \\
\qquad \underline{-(-5x + 5)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 + 4x - 5 = 0$ p-q-Formel

$x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4+5}$

$x_2 = 1$

$x_3 = -5$

Die 1 ist eine doppelte Lösung und somit die Stelle, an der die Tangente anliegt. Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(-5) = -33\frac{1}{3}$ (und zur Überprüfung $t(-5) = -33\frac{1}{3}$)

$S_3(-5|-33{,}3)$

$t_2(x) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \left| -6x - 18 \right.$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18 \quad \left| : \frac{2}{3} \right.$

$0 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ Polynomdivision mit $x_1 = -3$ (von Tangente vorgegeben)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 9x - 27) : (x + 3) = x^2 - 9 \\
\underline{-(x^3 + 3x^2)} \\
\quad 0 - 9x - 27 \\
\quad \underline{-(-9x - 27)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 3$

$x_3 = -3$

Die -3 ist doppelte Lösung, kommt also nicht in Frage; somit $f(3) = 36$ => $S_3(3|36)$

Die Überprüfung in t(x) sollte selbstverständlich sein.

4. Aufgabe

a) $f'(x) = x^3 - 2x$

$f'(1) = -1$ | $f'(-1) = 1$
$f(1) = -2$ | $f(-1) = -2$
$t(x) = m \cdot x + b$ | $t(x) = m \cdot x + b$
$-2 = -1 \cdot 1 + b$ | $-2 = 1 \cdot (-1) + b$
$b = -1$ => $t_1(x) = -x - 1$ | $b = -1$ => $t_2(x) = x - 1$

b) Da beide Tangenten den gleichen y-Achsenabschnitt (S_y) besitzen, schneiden sie sich dort. $S(0|-1)$

c) $t_1(x) = f(x)$

$-x - 1 = 0{,}25x^4 - x^2 - 1{,}25 \quad |+x+1$

$0 = 0{,}25x^4 + 0x^3 - x^2 + x - 0{,}25 \quad |:0{,}25$ $\qquad +0x^3$ einfügen wegen Polynomdivision

$0 = x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

Hier müssen zwei Polynomdivisionen durchgeführt werden, um eine quadratische Gleichung zu erhalten.
Die Teiler sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$, da eine Tangente ja eine doppelte Lösung liefert.
$S_{1/2}(1|-2)$
Nach der ersten Polynomdivision erhält man: $0 = x^3 + x^2 - 3x + 1$
Nach der zweiten Polynomdivision: $0 = x^2 + 2x - 1$
Aus p-q ergibt sich: $x_3 = 0{,}4$ und $x_4 = -2{,}4$

$t_1(0{,}4) = -1{,}4$ $\qquad S_3(0{,}4|-1{,}4)$
$t_1(-2{,}4) = 1{,}4$ $\qquad S_4(-2{,}4|1{,}4)$

Berechnet man die y-Werte in f(x), ergeben sich kleine Abweichungen, da die x-Werte gerundet wurden.

Da die Funktion Achsensymmetrie aufweist, kann man die beiden Schnittpunkte einfach an der y-Achse spiegeln, indem man nur die Vorzeichen der x-Werte ändert. Für $t_2(x)$ gilt also: $S_3(-0{,}4|-1{,}4)$, $S_4(+2{,}4|1{,}4)$ und natürlich $S_{1/2}(-1|-2)$

5. Aufgabe

1. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist für jeden x-Wert der y-Wert 4.
Man erhält den vollständigen Punkt (2l4).
Durch Einsetzten in f(x) erhält man a.

$f(x) = ax^3 + 3x$

$4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$

$4 = 8a + 6$

$-2 = 8a$

$-0{,}25 = a$

2. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist die Steigung $m = 0$.
Bildet man die erste Ableitung und setzt x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f'(x) = 3ax^2 + 3$

$0 = 3a \cdot 2^2 + 3$

$0 = 12a + 3$

$-3 = 12a$

$-0{,}25 = a$

Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$.