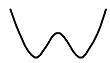
Lösungen D 17

<u>1. Aufgabe</u>

a) $f(x) = 4x^4 - 4x^2$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{array}{l} x \to -\infty; f(x) \to +\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to +\infty \end{array}$ (Der Graph kommt von oben und geht nach oben.) 

3. Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 4x^4 - 4x^2 \,|\, : 4$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^4 - x^2$ x^2 ausklammern

$0 = x^2(x^2 - 1)$

$x^2 = 0 \,|\sqrt{\ } \qquad x^2 - 1 = 0 \,|+1\,|\sqrt{\ }$

$x_{N1/2} = 0 \qquad x_{N3} = 1 \qquad x_{N4} = -1$

$S_{x1/2}(0|0) \quad S_{x3}(1|0) \quad S_{x4}(-1|0)$

Ableitungen

$f'(x) = 16x^3 - 8x$

$f''(x) = 48x^2 - 8$

$f'''(x) = 96x$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$	2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = 16x^3 - 8x \,|: 16$	$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow H$	$f(0) = 0$	$H(0|0)$
$0 = x^3 - 0{,}5x$	$f''(0{,}71) \approx 16{,}20 > 0 \Rightarrow T$	$f(0{,}71) \approx -1{,}00$	$T(0{,}71|-1{,}00)$
$0 = x(x^2 - 0{,}5)$	$f''(-0{,}71) \approx 16{,}20 > 0 \Rightarrow T$	$f(-0{,}71) \approx -1{,}00$	$T(-0{,}71|-1{,}00)$

$x_{E1} = 0 \qquad x^2 - 0{,}5 = 0 \,|+0{,}5\,|\sqrt{\ }$

$x_{E2} \approx 0{,}71$

$x_{E3} \approx -0{,}71$

$M_1 =]-\infty; -0{,}71]$ monoton fallend

$M_2 = [-0{,}71; 0]$ monoton steigend

$M_3 = [0; 0{,}71]$ monoton fallend

$M_4 = [0{,}71; +\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 48x^2 - 8 \,\|\, +8 \,|\, :48$

$\frac{1}{6} = x^2 \,|\, \sqrt{\ }$

$x_{W1} \approx 0{,}41$

$x_{W2} \approx -0{,}41$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(0{,}41) = 39{,}36 > 0 \Rightarrow R - L - K$

$f'''(-0{,}41) = -39{,}36 < 0 \Rightarrow L - R - K$

3. Schritt

$f(0{,}41) = -0{,}56$

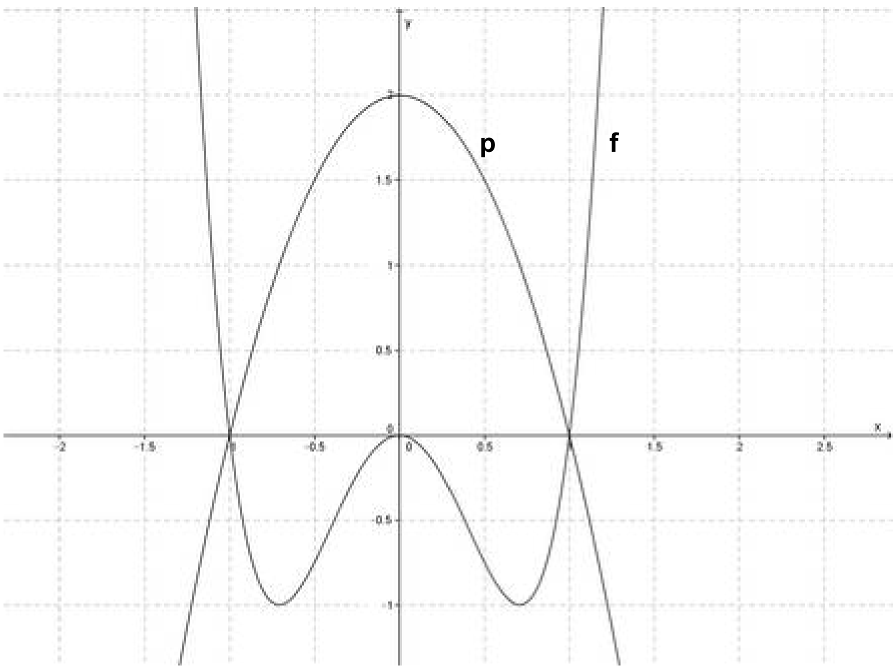
$f(-0{,}41) = -0{,}56$

$W_{R-L}(0{,}41 | -0{,}56)$

$W_{L-R}(-0{,}41 | -0{,}56)$

7. Zeichnung

a) und b)



c) $S_1(-1|0)$ $S_2(1|0)$

d)

$f(x) = p(x)$

$4x^4 - 4x^2 = -2x^2 + 2 \,|\, +2x^2 - 2$

$4x^4 - 2x^2 - 2 = 0 \,|\, :4$

$x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 0$

$x^2 = z$ Substitution

$z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

$z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0{,}5}$

$z_1 = 1$ $z_2 = -0{,}5$

$z = x^2$ Resubstitution

$x^2 = 1 \,|\, \sqrt{\ }$ $x^2 = -0{,}5 \,|\, \sqrt{\ }$

$x_1 = 1$ $x_{3/4} =$ n.l.

$x_2 = -1$

$f(1) = 0$ $S_1(1|0)$

$f(-1) = 0$ $S_2(-1|0)$

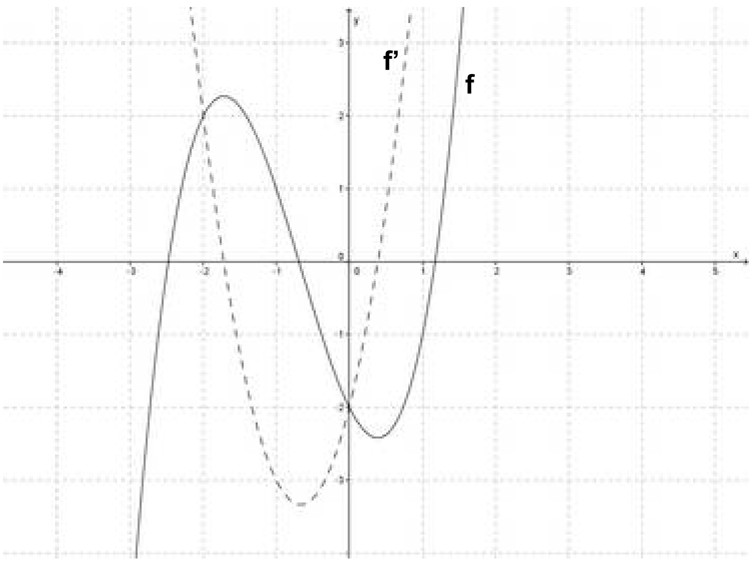
2. Aufgabe

Graph A ist der richtige Ableitungsgraph, da er dort Nullstellen besitzt, wo der Graph f Extrempunkte hat und das Steigungsverhalten von Graph f richtig (positiv, negativ, positiv) darstellt.

Graph B ist ein falscher Ableitungsgraph, da er seine Nullstellen nicht dort besitzt, wo der Graph f Extrempunkte hat.

Graph C ist ein falscher Ableitungsgraph, da er zwar dort Nullstellen besitzt, wo der Graph f Extrempunkte hat aber das Steigungsverhalten von Graph f falsch (negativ, positiv, negativ) darstellt.

3. Aufgabe



Die Funktionsgleichung c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ ist richtig, da der Ausgangsgraph f eine Funktion 3. Grades sein muss und von unten kommt und nach oben geht. (Vorzeichen plus)

Ableitungen

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 2$$
$$f''(x) = 6x + 4$$

Extrempunkte

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$$0 = 3x^2 + 4x - 2 \;|: 3$$
$$0 = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$
$$x_{E1/2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}}$$
$$x_{E1} \approx 0{,}39$$
$$x_{E2} \approx -1{,}72$$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$$f''(0{,}39) = 6{,}34 > 0 \Rightarrow T$$
$$f''(-1{,}72) \approx -6{,}32 < 0 \Rightarrow H$$

3. Schritt

$$f(0{,}39) \approx -2{,}42 \quad T(0{,}39|-2{,}42)$$
$$f(-1{,}72) \approx 2{,}27 \quad H(-1{,}72|2{,}27)$$

In der Zeichnung sind nur die x-Werte der Extrempunkte kontrollierbar (Nullstellen des Ableitungsgraphen). Diese stimmen mit der Berechnung überein.