Lösungen B 18

1. Aufgabe

Graph 1 (durchgezogene Linie)

a) - Der Graph kommt von oben und geht nach oben.
- Der Graph besitzt Achsensymmetrie zur y-Achse.
- $S_y(0|2{,}5)$
- $S_{x1/2}(-4|0)$; $S_{x3/4}(4|0)$ doppelte Schnittpunkte, da Berührpunkte
- $T_1(-4|0)$; $H(0|2{,}5)$; $T_2(4|0)$
- $W_1(-2|1{,}5)$; $W_2(2|1{,}5)$
- von $-\infty$ bis -4 monoton fallend
- von -4 bis 0 monoton steigend
- von 0 bis $+4$ monoton fallend
- von $+4$ bis $+\infty$ monoton steigend

b) mögliche Funktionsgleichung $f(x) = +ax^4 + bx^2 + 2{,}5$

$+ax^4$: Vorzeichen + wegen Verlauf (Graph geht nach oben); a unbekannt; mindestens 4. Grades wegen Verlauf und Achsensymmetrie

$+bx^2$: Vorzeichen unbekannt; b unbekannt aber $b \neq 0$, also x^2 vorhanden wegen Hoch- und Tiefpunkten

$+2{,}5$: y-Achsenabschnitt

Graph 2 (durchgezogene gerade Linie)

a) - Der Graph kommt von unten und geht nach oben.
- Der Graph besitzt keine Symmetrie.
- $S_y(0|-4)$
- S_x: im positiven Bereich
- keine Extrempunkte
- keine Wendepunkte
- von $-\infty$ bis $+\infty$ monoton steigend

b) mögliche Funktionsgleichung $f(x) = +ax - 4$

$+ax$: Vorzeichen + wegen Verlauf (Graph geht nach oben); a zuerst unbekannt; genau 1. Grades, da Gerade

-4 : y-Achsenabschnitt

Überarbeitung:

a entspricht der Steigung m, ablesbar im Steigungsdreieck mit $m = \frac{1}{4}$

=> $f(x) = +\frac{1}{4}x - 4$

Graph 3 (dünn gestrichelte Linie)

a) - Der Graph kommt von oben und geht nach oben.
- Der Graph besitzt keine Symmetrie.
- S_y: im positiven Bereich
- $S_{x1}(-7|0)$; $S_{x2}(-3|0)$
- $T(-5|-4)$
- keine Wendepunkte
- von $-\infty$ bis -5 monoton fallend
- von -5 bis $+\infty$ monoton steigend

b) mögliche Funktionsgleichung $f(x) = +ax^2 + bx + c$

$+ax^2$: Vorzeichen + wegen Verlauf (Graph geht nach oben); a zuerst unbekannt; mindestens 2. Grades wegen Verlauf

$+bx$: Vorzeichen unbekannt; b unbekannt aber $b \neq 0$, also x^1 vorhanden wegen Verschiebung in x-Achsenrichtung

$+c$: y-Achsenabschnitt, Wert unbekannt

Überarbeitung:
a entspricht dem Streckungsfaktor der Parabel, ablesbar vom Scheitel aus mit $a = 1$ (eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben)

=> $f(x) = 1(x+5)^2 - 4$ Scheitelpunktform

$f(x) = x^2 + 10x + 21$ Allgemeine Form => $b = 10$ und $c = 21$

Graph 4 (gepunktete Linie)

a) - Der Graph kommt von oben und geht nach unten.
- Der Graph besitzt keine Symmetrie.
- $S_y(0|-1)$
- $S_x(-1|0)$
- keine Extrempunkte
- $W(0|-1)$
- von $-\infty$ bis $+\infty$ monoton fallend

b) mögliche Funktionsgleichung $f(x) = -ax^3 - 1$

$-ax^3$: Vorzeichen - wegen Verlauf (Graph geht nach unten); a unbekannt; mindestens 3. Grades wegen Verlauf und Wendepunkt

-1: y-Achsenabschnitt

Graph 5 (dick gestrichelte Linie)

a) - Der Graph kommt von unten und geht nach oben.
- Der Graph besitzt Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung.
- $S_y(0|0)$
- $S_{x1}(-2,5|0)$; $S_{x2}(0|0)$: $S_{x3}(2,5|0)$
- $H(-1,5|1,5)$; $T(1,5|-1,5)$
- $W(0|0)$
- von $-\infty$ bis $-1,5$ monoton steigend
- von $-1,5$ bis $+1,5$ monoton fallend
- von $+1,5$ bis $+\infty$ monoton steigend

b) mögliche Funktionsgleichung $f(x) = +ax^3 + bx$

$+ax^3$: Vorzeichen + wegen Verlauf (Graph geht nach oben); a unbekannt; mindestens 3. Grades wegen Verlauf und Extrempunkten

kein x^2: nur ungerade Exponenten möglich wegen Punktsymmetrie

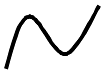
$+bx$: Vorzeichen unbekannt; b unbekannt aber $b \neq 0$, also x^1 vorhanden wegen Hoch- und Tiefpunkten

kein y-Achsenabschnitt, nur ungerade Exponenten möglich wegen Punktsymmetrie

2. Aufgabe

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x-6$

a) $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$



Der Graph besitzt keine Symmetrie,

da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

b) $S_y(0|-6)$

c) $f(x_N)=0$

$0=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x-6 \,\Big|\, :\frac{1}{3}$

$0=x^3-6x^2+15x-18$ TR: $x_{N1}=3$

Polynomdivision oder Horner-Schema

$$(x^3-6x^2+15x-18):(x-3)=x^2-3x+6$$
$$\underline{-(x^3-3x^2)}$$
$$-3x^2+15x$$
$$\underline{-(-3x^2+9x)}$$
$$6x-18$$
$$\underline{-(6x-18)}$$
$$0$$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-6	15	-18	
0	1	-3	6	0

$x^2-3x+6=0$

Rechnungen (im Kopf)

$0\cdot(3)+1=1$

$1\cdot(3)-6=-3$

$-3\cdot(3)+15=6$

$6\cdot(3)-18=0$

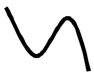
p-q-Formel

$x_{2/3}=+1{,}5\pm\sqrt{1{,}5^2-6}$

$x_{2/3}=\text{n.l.}$

$g(x)=-x^3+4x$

a) $x \to -\infty; g(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; g(x) \to -\infty$



Der Graph besitzt Punktsymmetrie zum Ursprung,

da nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

b) $S_y(0|0)$

c) $g(x_N)=0$

$0=-x^3+4x \,|\, :(-1)$

$0=x^3-4x$

$0=x(x^2-4)$

$x_{N1}=0$ $\quad x^2-4=0 \,|\, +4$

$x^2=4 \,|\, \sqrt{}$

$x_{N2}=2$ $\quad x_{N3}=-2$

$h(x)=-x^2+4x$

a) $x \to -\infty; h(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; h(x) \to -\infty$

Der Graph besitzt keine Symmetrie,

da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

b) $S_y(0|0)$

c) $h(x_N) = 0$

$0 = -x^2 + 4x \,|\, :(-1)$

$0 = x^2 - 4x$

$0 = x(x-4)$

$x_{N1} = 0 \qquad x_{N2} = 4$

$p(x) = -x^4 + 3x^2 + 4$

a) $x \to -\infty; p(x) \to -\infty$
$x \to +\infty; p(x) \to -\infty$

Der Graph besitzt Achsensymmetrie zur y-Achse,
da nur gerade Exponenten vorhanden sind.

b) $S_y(0|4)$

c) $p(x_N) = 0$

$0 = -x^4 + 3x^2 + 4 \,|\, :(-1)$

$0 = x^4 - 3x^2 - 4$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 3z - 4$

$z_{1/2} = +1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 4}$

$z_1 = 4 \qquad z_2 = -1$

$z = x^2$

$x^2 = 4 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x_{N1} = 2 \quad x_{N2} = -2$

$x^2 = -1 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x_{N3/N4} = \text{n.l.}$

$q(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}5x^3$

a) $x \to -\infty; q(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; q(x) \to +\infty$

Der Graph besitzt keine Symmetrie,
da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

b) $S_y(0|0)$

c) $q(x_N) = 0$

$0 = 0{,}5x^4 - 1{,}5x^3 \,|\, :0{,}5$

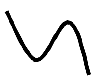
$0 = x^4 - 3x^3$

$0 = x^3(x-3)$

$x_{N1/2/3} = 0 \qquad x_{N4} = 3$

$r(x) = -2x^3 + 5x - 2$

a) $x \to -\infty; r(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; r(x) \to -\infty$



Der Graph besitzt keine Symmetrie,
da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

b) $S_y(0|-2)$

d) $r(x_N) = 0$

$0 = -2x^3 + 5x - 2$ ermitteln mit TR: $x_{N1} \approx -1{,}75 \qquad x_{N2} \approx 1{,}32 \qquad x_{N3} \approx 0{,}43$

3. Aufgabe

$f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 - 0{,}6x + 1$ (blauer Graph)

Der Graph muss von unten kommen und nach oben gehen, da das Vorzeichen der höchsten Potenz positiv und der Grad ungerade ist.
Der Graph weist keine Symmetrie auf, da gerade und ungerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind.
Die y-Achse wird bei $S_y(0|1)$ geschnitten.

$g(x) = x^4 - x$ (rosa Graph)

Der Graph muss von oben kommen und nach oben gehen, da das Vorzeichen der höchsten Potenz positiv und der Grad gerade ist.
Der Graph weist keine Symmetrie auf, da gerade und ungerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind.
Die y-Achse wird bei $S_y(0|0)$ geschnitten.

$h(x) = x^2 + 7x + 8$ (oranger Graph)

Der Graph muss von oben kommen und nach oben gehen, da das Vorzeichen der höchsten Potenz positiv und der Grad gerade ist.
Der Graph weist keine Symmetrie auf, da gerade und ungerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind.
Die y-Achse wird bei $S_y(0|8)$ geschnitten.

$p(x) = -0{,}5x^3 + 2x + 1$ (schwarzer Graph)

Der Graph muss von oben kommen und nach unten gehen, da das Vorzeichen der höchsten Potenz negativ und der Grad ungerade ist.
Der Graph weist keine Symmetrie auf, da gerade und ungerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind.
Die y-Achse wird bei $S_y(0|1)$ geschnitten.

$q(x) = \frac{1}{10}x^4 - x^2 - 2$ (lila Graph)

Der Graph muss von oben kommen und nach oben gehen, da das Vorzeichen der höchsten Potenz positiv und der Grad gerade ist.
Der Graph weist Achsensymmetrie zur y-Achse auf, da nur gerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind.
Die y-Achse wird bei $S_y(0|-2)$ geschnitten.

$r(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$ (grüner Graph)

Der Graph muss von unten kommen und nach unten gehen, da das Vorzeichen der höchsten Potenz negativ und der Grad gerade ist.
Für weitere Beurteilungen sollte man die Funktionsgleichung umformen.

$r(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + 2$

$r(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + 2$

$r(x) = -0{,}5x^2 - x + 1{,}5$

Der Graph weist keine Symmetrie auf, da gerade und ungerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorhanden sind.
Die y-Achse wird bei $S_y(0|1{,}5)$ geschnitten.

<u>4. Aufgabe</u>

a) $g(x) = r(x)$

$$x^4 - x = -0{,}5x^2 - x + 1{,}5 \quad \big| - x^4 + x$$

$$0 = -x^4 - 0{,}5x^2 + 1{,}5 \quad \big| : (-1)$$

$$0 = x^4 + 0{,}5x^2 - 1{,}5$$

$$x^2 = z$$

$$0 = z^2 + 0{,}5z - 1{,}5$$

$$z_{1/2} = -0{,}25 \pm \sqrt{0{,}25^2 + 1{,}5}$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = -1{,}5$$

$$z = x^2$$

$$x^2 = 1 \quad \big| \sqrt{} \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$x^2 = -1{,}5 \quad \big| \sqrt{} \qquad x_{3/4} = \text{n.l.}$$

$$g(1) = 0 \qquad S_1(1|0)$$

$$g(-1) = 2 \qquad S_2(-1|2)$$ vgl. Material 2

b) $f(x) = p(x)$

$$0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 - 0{,}6x + 1 = -0{,}5x^3 + 2x + 1 \quad \big| + 0{,}5x^3 - 2x - 1$$

$$0 = 0{,}6x^3 + 0{,}5x^2 - 2{,}6x$$

$$0 = x(0{,}6x^2 + 0{,}5x - 2{,}6)$$

$$x_1 = 0 \qquad 0{,}6x^2 + 0{,}5x - 2{,}6 = 0 \quad \big| : 0{,}6$$

$$x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{13}{3} = 0$$

$$x_{2/3} = -\frac{5}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + \frac{13}{3}}$$

$$x_2 \approx 1{,}71 \qquad x_3 \approx -2{,}54$$

$$p(0) = 1 \qquad S_1(0|1)$$

$$p(1{,}71) \approx 1{,}92 \qquad S_2(1{,}71|1{,}92)$$

$$p(-2{,}54) = 4{,}11 \qquad S_3(-2{,}54|4{,}11)$$ vgl. Material 2

c) $h(x) = p(x)$

$$x^2 + 7x + 8 = -0{,}5x^3 + 2x + 1 \quad \big| - x^2 - 7x - 8$$

$$0 = -0{,}5x^3 - x^2 - 5x - 7$$

ermitteln mit TR:

$$x_1 \approx -1{,}51 \qquad x_{2/3} = \text{n.l.}$$

$$h(-1{,}51) \approx -0{,}29 \qquad S_1(-1{,}51|-0{,}29)$$ vgl. Material 2