


Lösungen B 17

1. Aufgabe

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow -\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von oben und geht nach unten.) 

3. Punktsymmetrie (PS), da nur ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \quad f(0) = 0 \quad S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \quad \left| : \left(-\frac{1}{3}\right) \right.$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^3 - 9x$

$0 = x(x^2 - 9)$ x ausklammern

$x_{N1} = 0 \quad x^2 - 9 = 0 \quad | +9$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$

$x_{N2} = 3$

$x_{N3} = -3$

$S_{x1}(0|0) \quad S_{x2}(3|0) \quad S_{x3}(-3|0)$

$f'(x) = -x^2 + 3$

Ableitungen $f''(x) = -2x$

$f'''(x) = -2$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -x^2 + 3 \quad | +x^2$

$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\quad}$

$x_{E1} \approx 1,73$

$x_{E2} \approx -1,73$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(1,73) = -3,46 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-1,73) = 3,46 > 0 \Rightarrow T$

3. Schritt

$f(1,73) \approx 3,46 \quad H(1,73|3,46)$

$f(-1,73) \approx -3,46 \quad T(-1,73|-3,46)$

$M_1 =]-\infty; -1,73]$ monoton fallend

$M_2 = [-1,73; 1,73]$ monoton steigend

$M_3 = [1,73; +\infty[$ monoton fallend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -2x \quad | :(-2)$

$0 = x_W$

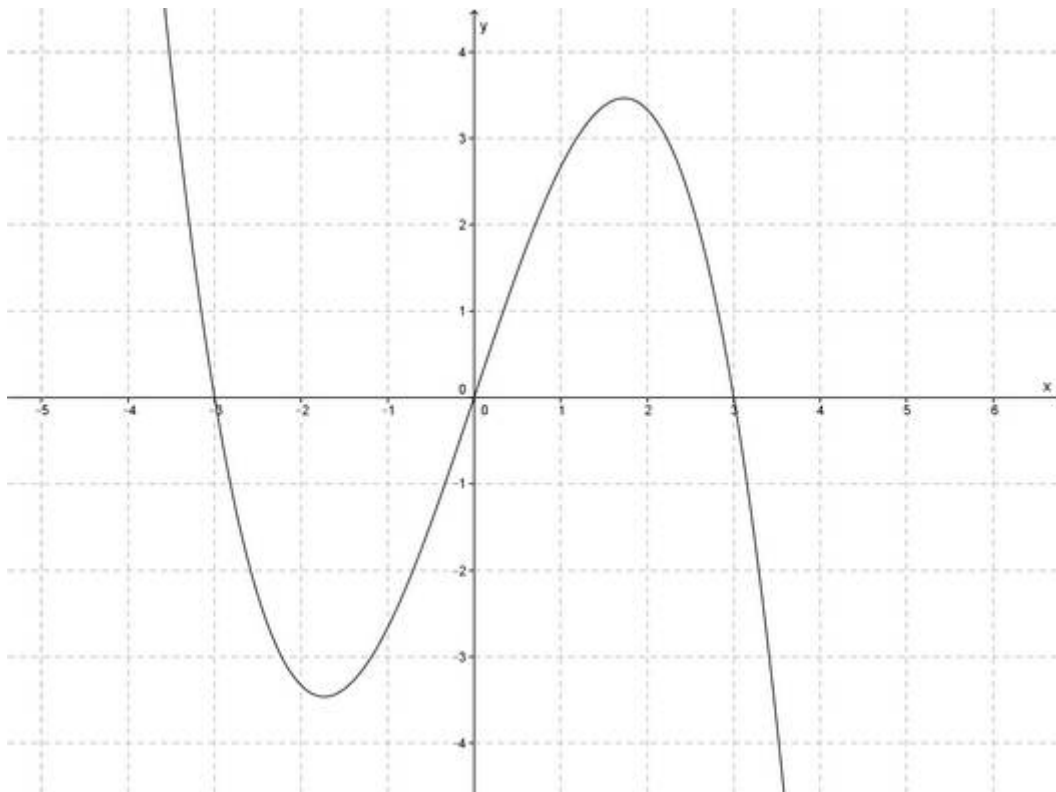
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(0) = -2 < 0 \Rightarrow L-R-K$

$f(0) = 0$


$W_{L-R}(0|0)$

7. Zeichnung



b) $f(x) = -0,2x^4 + 2x^2 - 1,8$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow -\infty$ (Der Graph kommt von unten und geht nach unten.) 

3. Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$$x = 0 \quad f(0) = -1,8 \quad S_y(0|-1,8)$$

$$f(x_N) = 0$$

$$0 = -0,2x^4 + 2x^2 - 1,8; (-0,2) \quad (\text{Normalisieren nur, wenn } = 0 \text{ steht})$$

$$0 = x^4 - 10x^2 + 9$$

$$x^2 = z$$

Substitution

$$0 = z^2 - 10z + 9$$

$$z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$$

$$z_1 = 9 \quad z_2 = 1$$

$$z = x^2$$

Resubstitution

$$x^2 = 9 \sqrt{\quad} \quad x^2 = 1 \sqrt{\quad}$$

$$x_{N1} = 3 \quad x_{N3} = 1$$

$$x_{N2} = -3 \quad x_{N4} = -1$$

$$S_{x1}(3|0) \quad S_{x2}(-3|0) \quad S_{x3}(1|0) \quad S_{x4}(-1|0)$$

$$f'(x) = -0,8x^3 + 4x$$

Ableitungen $f''(x) = -2,4x^2 + 4$

$$f'''(x) = -4,8x$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = -0,8x^3 + 4x \mid : (-0,8) \quad f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$$

$$f(0) = -1,8 \quad T(0 \mid -1,8)$$

$$0 = x^3 - 5x \quad f''(2,24) \approx -8,04 < 0 \Rightarrow H$$

$$f(2,24) \approx 3,20 \quad H(2,24 \mid 3,20)$$

$$0 = x(x^2 - 5) \quad f''(-2,24) \approx -8,04 < 0 \Rightarrow H$$

$$f(-2,24) \approx 3,20 \quad H(-2,24 \mid 3,20)$$

$$x_{E1} = 0 \quad x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5 \mid \sqrt{}$$

$$x_{E2} \approx 2,24$$

$$x_{E3} \approx -2,24$$

$$M_1 =]-\infty; -2,24] \quad \text{monoton steigend}$$

$$M_2 = [-2,24; 0] \quad \text{monoton fallend}$$

$$M_3 = [0; 2,24] \quad \text{monoton steigend}$$

$$M_4 = [2,24; +\infty[\quad \text{monoton fallend}$$

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = -2,4x^2 + 4 \mid +2,4x^2 \quad f'''(1,29) \approx -6,19 < 0 \Rightarrow L-R-K \quad f(1,29) \approx 0,97 \quad W_{L-R}(1,29 \mid 0,97)$$

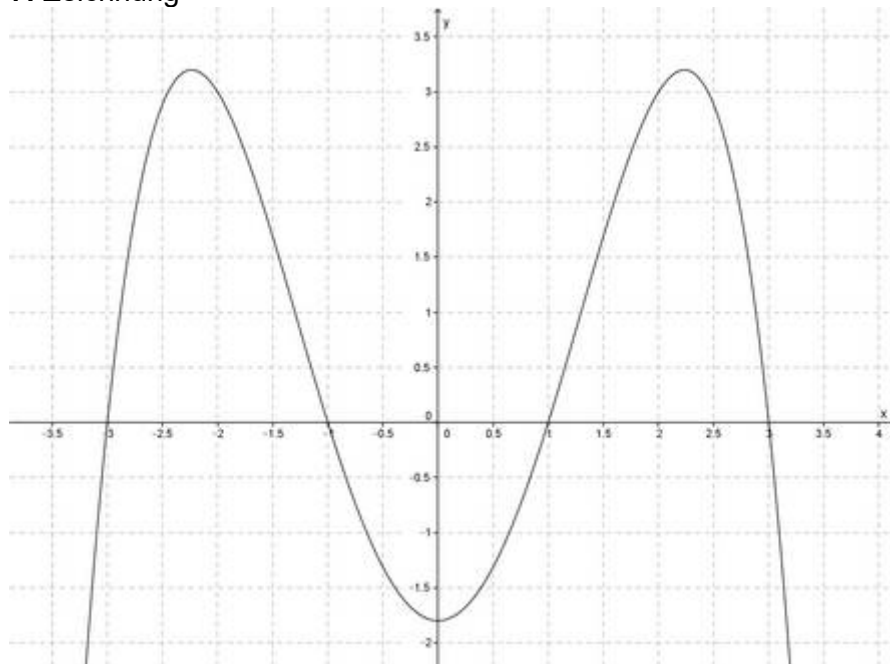
$$2,4x^2 = 4 \mid : 2,4 \quad f'''(-1,29) \approx 6,19 > 0 \Rightarrow R-L-K \quad f(-1,29) \approx 0,97 \quad W_{R-L}(-1,29 \mid 0,97)$$

$$x^2 = \frac{5}{3} \mid \sqrt{}$$

$$x_{W1} \approx 1,29$$


$$x_{W2} \approx -1,29$$

7. Zeichnung



c) $f(x) = 0,1x^4 - 0,6x^3 + 0,4x^2 + 2,4x - 3,2$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow +\infty$ (Der Graph kommt von oben und geht nach oben.) 

3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \quad f(0) = -3,2 \quad S_y(0|-3,2)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 0,1x^4 - 0,6x^3 + 0,4x^2 + 2,4x - 3,2 | \cdot 10$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 24x - 32$ Polynomdivision mit $x_{N1} = -2$

$(x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 24x - 32) : (x + 2) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$

$$\begin{array}{r} -(x^4 + 2x^3) \\ \hline -8x^3 + 4x^2 \\ -(-8x^3 - 16x^2) \\ \hline 20x^2 + 24x \\ -(20x^2 + 40x) \\ \hline -16x - 32 \\ -(-16x - 32) \\ \hline 0 \end{array}$$

Polynomdivision mit $x_{N2} = +2$

$(x^3 - 8x^2 + 20x - 16) : (x - 2) = x^2 - 6x + 8$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -6x^2 + 20x \\ -(-6x^2 + 12x) \\ \hline 8x - 16 \\ -(8x - 16) \\ \hline 0 \end{array}$$

$x_{N3/4} = +3 \pm \sqrt{9 - 8}$ pq-Formel

$x_{N3} = 4$

$x_{N4} = 2$

$S_{x1}(-2|0) \quad S_{x2/4}(2|0) \quad S_{x3}(4|0)$

doppelte Nullstelle = Extrempunkt

$f'(x) = 0,4x^3 - 1,8x^2 + 0,8x + 2,4$

Ableitungen $f''(x) = 1,2x^2 - 3,6x + 0,8$

$f'''(x) = 2,4x - 3,6$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = 0,4x^3 - 1,8x^2 + 0,8x + 2,4 | \cdot 10$

$0 = x^3 - 4,5x^2 + 2x + 6$ Polynomdivision mit $x_{E1} = +2$

$$(x^3 - 4,5x^2 + 2x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2,5x - 3$$

$$\frac{-(x^3 - 2x^2)}{-2,5x^2 + 2x}$$

$$\frac{-(-2,5x^2 + 5x)}{-3x + 6}$$

$$\frac{-(-3x + 6)}{0}$$

$$x_{E2/3} = +\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 3} \quad \text{pq-Formel}$$

$$x_{E2} \approx 3,39$$

$$x_{E3} \approx -0,89$$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$$f''(2) = -1,6 < 0 \Rightarrow H$$

$$f(2) = 0$$

$$H(2|0)$$

$$f''(3,39) \approx 2,39 > 0 \Rightarrow T$$

$$f(3,39) \approx -0,64$$

$$T(3,39|-0,64)$$

$$f''(-0,89) \approx 4,95 > 0 \Rightarrow T$$

$$f(-0,89) \approx -4,53$$

$$T(-0,89|-4,53)$$

$$M_1 =]-\infty; -0,89] \quad \text{monoton fallend}$$

$$M_2 = [-0,89; 2] \quad \text{monoton steigend}$$

$$M_3 = [2; 3,39] \quad \text{monoton fallend}$$

$$M_4 = [3,39; +\infty[\quad \text{monoton steigend}$$

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$$0 = 1,2x^2 - 3,6x + 0,8 : 1,2$$

$$x_{W1/2} = +1,5 \pm \sqrt{1,5^2 - \frac{2}{3}}$$

$$0 = x^2 - 3x + \frac{2}{3}$$

$$x_{W1} \approx 2,76$$

$$x_{W2} \approx 0,24$$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

3. Schritt

$$f'''(2,76) \approx 3,02 > 0 \Rightarrow R-L-K$$

$$f(2,76) \approx -0,34$$

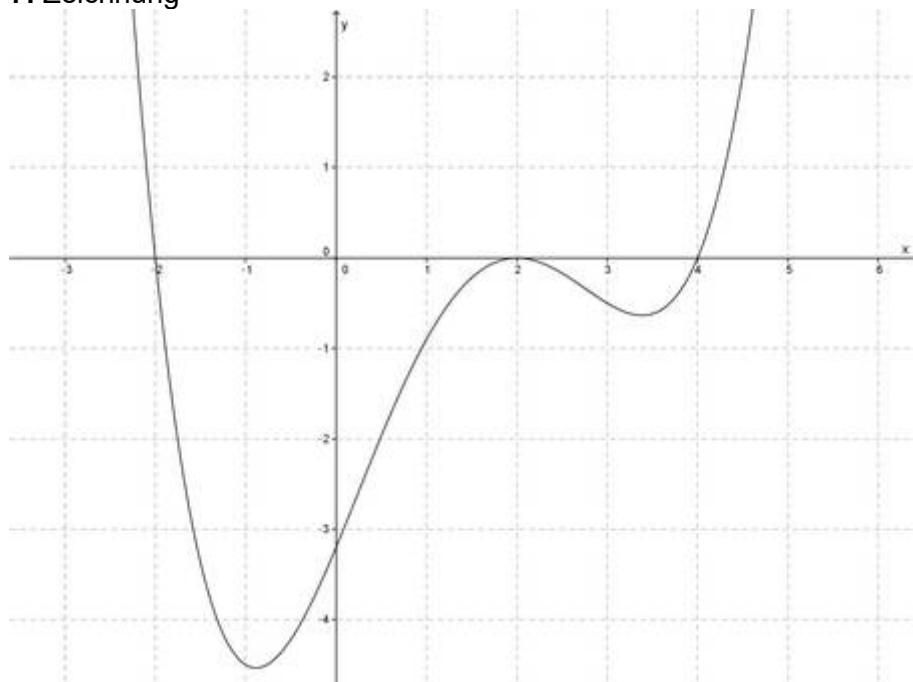
$$W_{R-L}(2,76|-0,34)$$

$$f'''(0,24) \approx -3,02 < 0 \Rightarrow L-R-K$$

$$f(0,24) \approx -2,54$$

$$W_{L-R}(0,24|-2,54)$$

7. Zeichnung



$$d) f(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 - \frac{27}{5}$$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow +\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von unten und geht nach oben.)



3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$$x = 0 \quad f(0) = -\frac{27}{5} \quad S_y(0|-5,4)$$

$$f(x_N) = 0$$

$$0 = \frac{2}{5}x^3 + \frac{9}{5}x^2 - \frac{27}{5} \quad \left| \cdot \left(\frac{5}{2}\right) \right. \quad (\text{Normalisieren nur, wenn } = 0 \text{ steht})$$

$$0 = x^3 + 4,5x^2 - 13,5 \quad \text{Polynomdivision mit } x_{N1} = -3$$

$$(x^3 + 4,5x^2 + 0x - 13,5) : (x + 3) = x^2 + 1,5x - 4,5$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 + 3x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$1,5x^2 + 0x$$

$$\begin{array}{r} -(1,5x^2 + 4,5x) \\ \hline \end{array}$$

$$-4,5x - 13,5$$

$$\begin{array}{r} -(-4,5x - 13,5) \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

$$S_{x1/3}(-3|0) \quad S_{x2}(1,5|0) \quad \text{doppelte Nullstelle = Extrempunkt}$$

$$f'(x) = 1,2x^2 + 3,6x$$

Ableitungen $f''(x) = 2,4x + 3,6$

$$f'''(x) = 2,4$$

$$x_{N2/3} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4,5} \quad \text{pq-Formel}$$

$$x_{N2} = 1,5$$

$$x_{N3} = -3$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = 1,2x^2 + 3,6x \quad | : 1,2$$

$$f''(0) = 3,6 > 0 \Rightarrow T$$

$$f(0) = -5,4$$

$$T(0|-5,4)$$

$$0 = x^2 + 3x$$

$$f''(-3) = -3,6 < 0 \Rightarrow H$$

$$f(-3) = 0$$

$$H(-3|0)$$

$$0 = x(x + 3)$$

$$x_{E1} = 0$$

$$M_1 =]-\infty; -3] \quad \text{monoton steigend}$$

$$x_{E2} = -3$$

$$M_2 = [-3; 0] \quad \text{monoton fallend}$$

$$M_3 = [0; +\infty[\quad \text{monoton steigend}$$

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = 2,4x + 3,6 \quad | -3,6 : 2,4$$

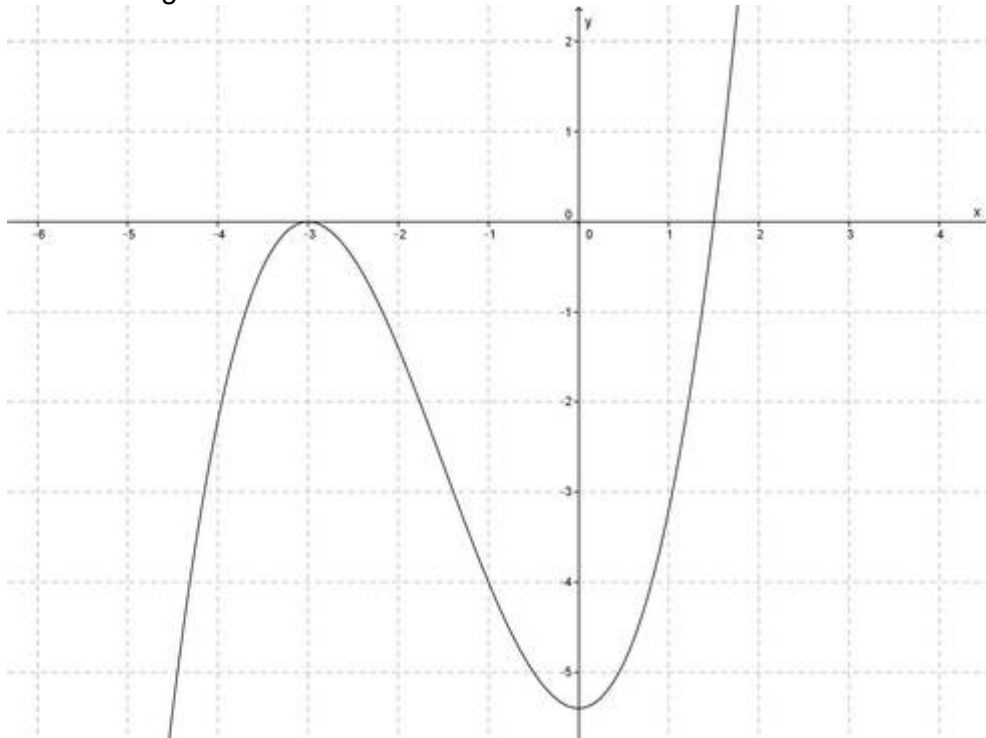
$$f'''(-1,5) = 2,4 > 0 \Rightarrow R-L-K$$

$$f(-1,5) = -2,7$$

$$W_{R-L}(-1,5|-2,7)$$

$$-1,5 = x_W$$

7. Zeichnung



e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow -\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von oben und geht nach unten.)



3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$$x = 0 \quad f(0) = 4 \quad S_y(0|4)$$

$$f(x_N) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4 \quad \left| : \left(-\frac{1}{4}\right) \right. \quad (\text{Normalisieren nur, wenn } = 0 \text{ steht})$$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 12x - 16 \quad \text{Polynomdivision mit } x_{N1} = 4$$

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 16) : (x - 4) = x^2 - 2x + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 4x^2) \\ \hline -2x^2 + 12x \\ -(-2x^2 + 8x) \\ \hline 4x - 16 \\ -(4x - 16) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_{N2/3} = 1 \pm \sqrt{1 - 4}$$

$$x_{N2/3} = \text{n.l.}$$

pq-Formel

$$S_{x1}(4|0)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 3$$

Ableitungen $f''(x) = -1,5x + 3$

$$f'''(x) = -1,5$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$$0 = -0,75x^2 + 3x - 3; (-0,75)$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

doppelter Extrempunkt = Sattelpunkt

$$0 = x^2 - 4x + 4$$

$$x_{E1/2} = 2$$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$$f''(2) = 0 = 0 \Rightarrow \text{kein Extrempunkt, Sattelpunkt}$$

3. Schritt

$$f(2) = 2$$

$$\text{Sp}(2|2)$$

$$M_1 =]-\infty; +\infty[$$

monoton fallend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

3. Schritt

$$0 = -1,5x + 3; +1,5x; 1,5$$

$$f'''(2) = -1,5 < 0 \Rightarrow \text{L-R-K}$$

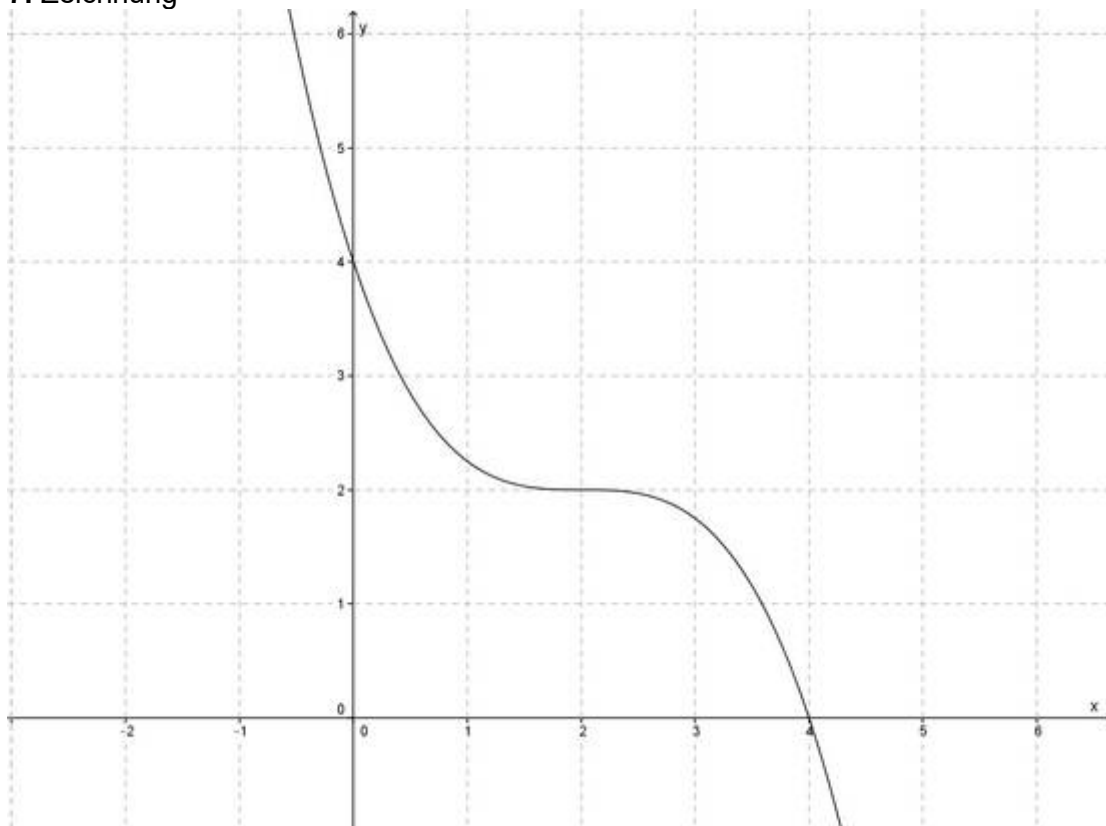
$$f(2) = 2$$

$$W_{L-R}(2|2)$$

$$x_W = 2$$


Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit der Steigung 0.

7. Zeichnung



f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

2. Verlauf: $x \rightarrow -\infty; f(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow +\infty; f(x) \rightarrow -\infty$ (Der Graph kommt von unten und geht nach unten.) 

3. Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$x = 0 \quad f(0) = 1 \quad S_y(0|1)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -x^4 + 3x^2 + 1; (-1)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^4 - 3x^2 - 1$

$x^2 = z$ Substitution

$0 = z^2 - 3z - 1$

$z_{1/2} = 1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 1}$

$z_1 \approx 3,30 \quad z_2 \approx -0,30$

$z = x^2$ Resubstitution

$x^2 = 3,3 \sqrt{\quad} \quad x^2 = -0,30 \sqrt{\quad}$

$x_{N1} \approx 1,82$

$x_{N3/4} = \text{n.l.}$

$x_{N2} \approx -1,82$

$S_{x1}(1,82|0) \quad S_{x2}(-1,82|0)$

$f'(x) = -4x^3 + 6x$

Ableitungen $f''(x) = -12x^2 + 6$

$f'''(x) = -24x$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

3. Schritt

$0 = -4x^3 + 6x; (-4)$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow T$

$f(0) = 1$

$T(0|1)$

$0 = x^3 - 1,5x$

$f''(1,22) \approx -11,86 < 0 \Rightarrow H$

$f(1,22) \approx 3,25$

$H(1,22|3,25)$

$0 = x(x^2 - 1,5)$

$f''(-1,22) \approx -11,86 < 0 \Rightarrow H$

$f(-1,22) \approx 3,25$

$H(-1,22|3,25)$

$x_{E1} = 0 \quad x^2 - 1,5 = 0$

$x^2 = 1,5 \sqrt{\quad}$

$x_{E2} \approx 1,22$

$x_{E3} \approx -1,22$

$M_1 =]-\infty; -1,22]$ monoton steigend

$M_2 = [-1,22; 0]$ monoton fallend

$M_3 = [0; 1,22]$ monoton steigend

$M_4 = [1,22; +\infty[$ monoton fallend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$$0 = -12x^2 + 6 \mid +12x^2$$

$$12x^2 = 6 \mid :12$$

$$x^2 = 0,5 \mid \sqrt{}$$

$$x_{W1} \approx 0,71$$

$$x_{W2} \approx -0,71$$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$$f'''(0,71) = -17,04 < 0 \Rightarrow \text{L-R-K}$$

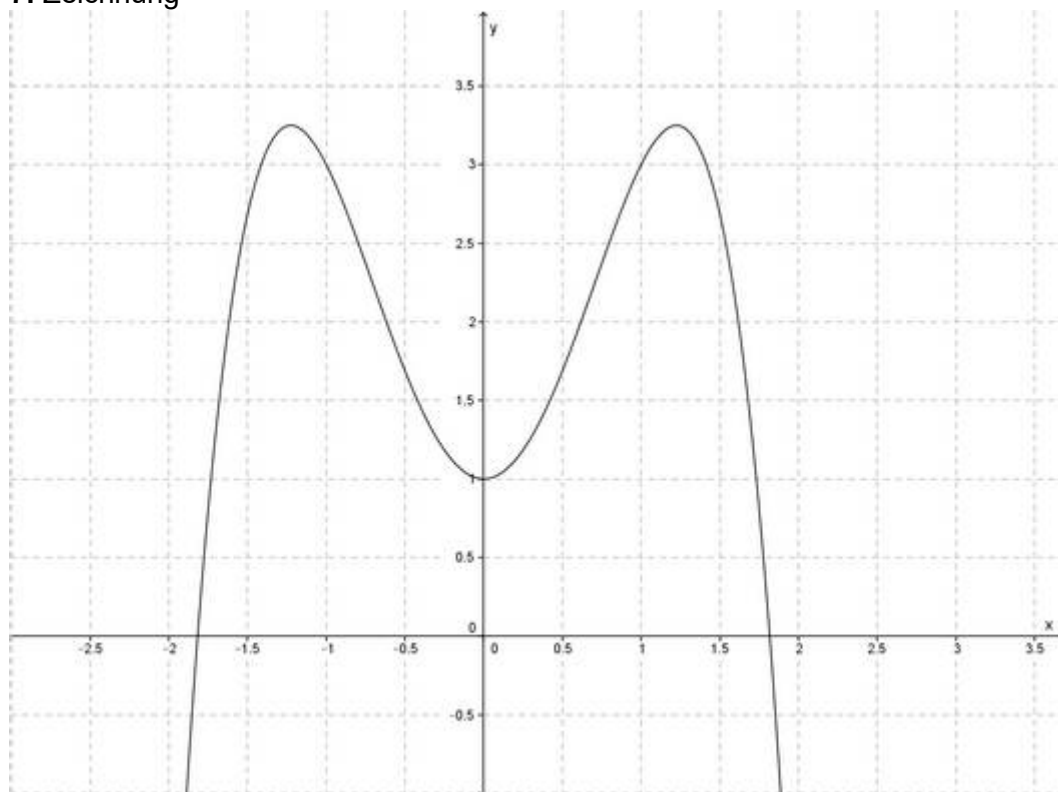
$$f'''(-1,29) = 17,04 > 0 \Rightarrow \text{R-L-K}$$

3. Schritt

$$f(0,71) \approx 2,26 \quad W_{L-R}(0,71 \mid 2,26)$$

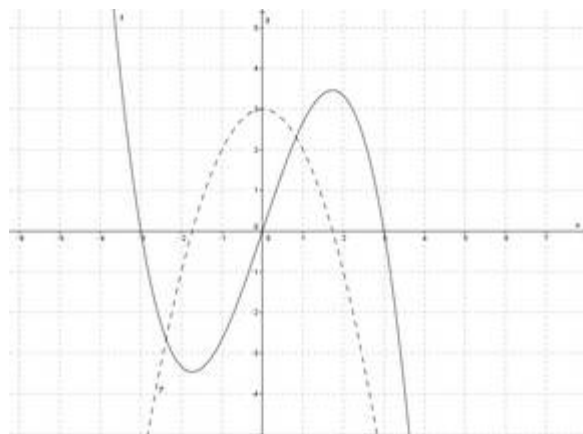
$$f(-0,71) \approx 2,26 \quad W_{R-L}(-0,71 \mid 2,26)$$

7. Zeichnung

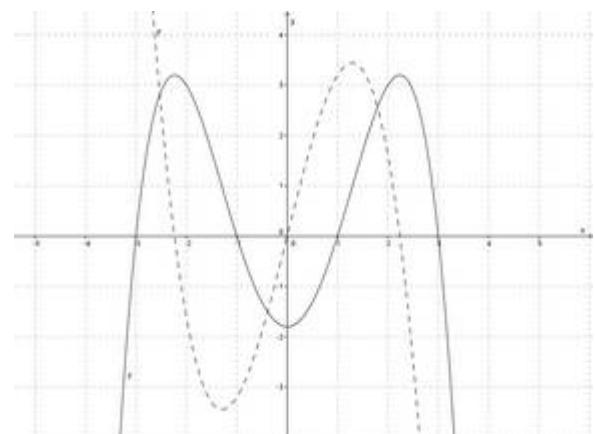


2. Aufgabe

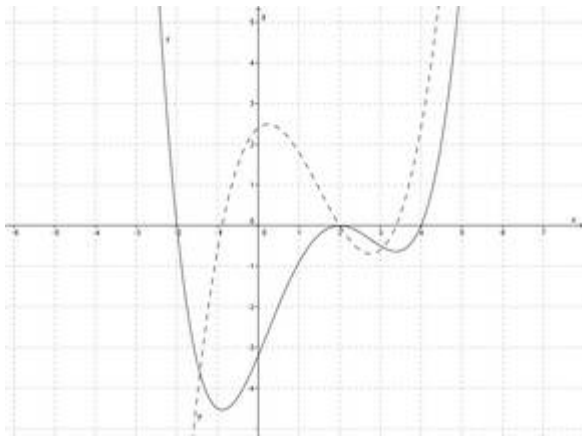
a)



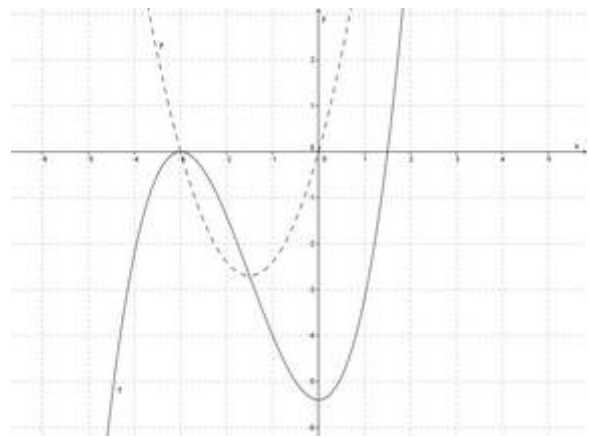
b)



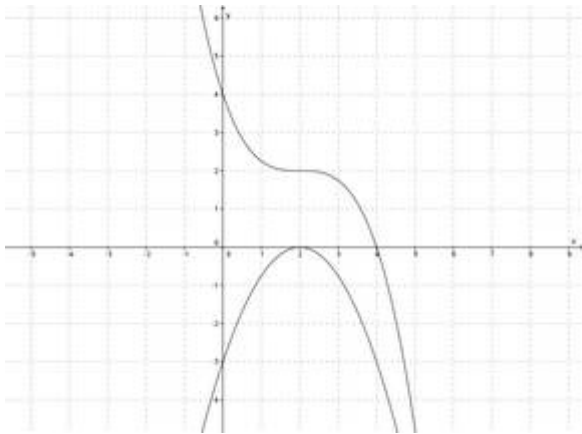
c)



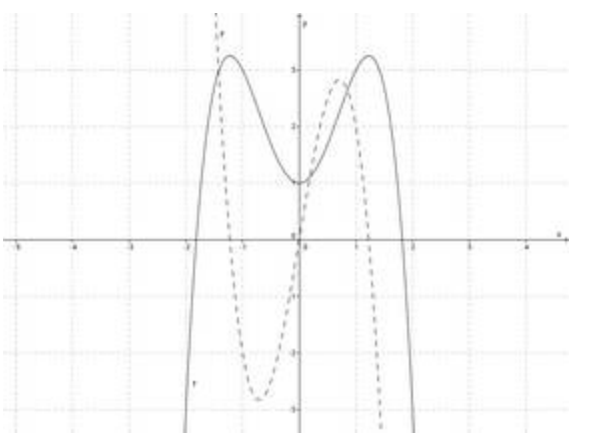
d)



e)



f)



3. Aufgabe

a)

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^3 - 3x = 3x^2 - 2 \quad | -3x^2 + 2$$

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \quad | :2$$

$$x^3 - 1,5x^2 - 1,5x + 1 = 0$$

Polynomdivision mit $x_1 = -1$

$$(x^3 - 1,5x^2 - 1,5x + 1) : (x + 1) = x^2 - 2,5x + 1$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 + x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$-2,5x^2 - 1,5x$$

$$\begin{array}{r} -(-2,5x^2 - 2,5x) \\ \hline \end{array}$$

$$x + 1$$

$$\begin{array}{r} -(x + 1) \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

$$x_{2/3} = +\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} \quad \text{pq-Formel}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 0,5$$

x-Werte einsetzen in eine der beiden Ausgangsfunktionen:

$$g(-1) = 1 \quad g(2) = 10 \quad f(0,5) = -1,25$$

$$S_1(-1|1) \quad S_2(2|10) \quad S_3(0,5|-1,25)$$

b)

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^4 - 6x = -2x^2 - 6x + 4 \quad | + 2x^2 + 6x - 4$$

$$2x^4 + 2x^2 - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = z \quad \text{Substitution}$$

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$z_{1/2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 2}$$

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -2$$

$$z = x^2 \quad \text{Resubstitution}$$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad} \quad x^2 = -2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 1 \quad x_{3/4} = \text{n.l.}$$

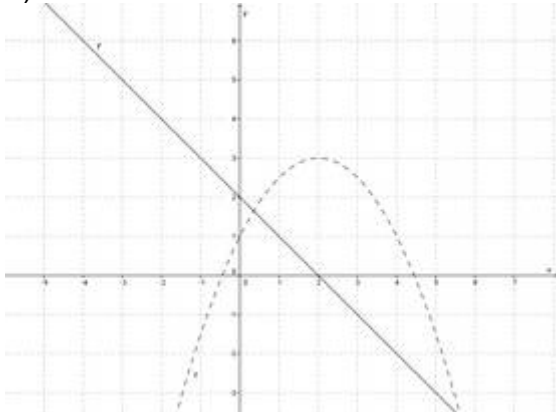
$$x_2 = -1$$

$$f(1) = -4 \quad f(-1) = 8$$

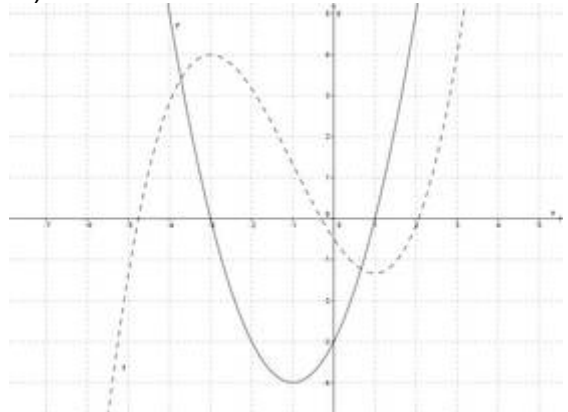
$$S_1(1|-4) \quad S_2(-1|8)$$

4. Aufgabe

a)



b)



c)

