

Lösungen BW R18

1. Aufgabe

Fläche zwischen zwei Funktionen => Schnittstellen berechnen

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0,4x^3 - 2,6x^2 + 4x \quad \text{umformen}$$

$$0 = -0,6x^3 + 5,4x^2 - 12x \quad (\text{Funktion zum Integrieren})$$

$$0 = -0,6x^3 + 5,4x^2 - 12x : (-0,6)$$

$$0 = x^3 - 9x^2 + 20x \quad \text{ausklammern mit } x_1 = 0 \text{ ergibt}$$

$$0 = x^2 - 9x + 20$$

$$p\text{-q ergibt } x_2 = 5 \text{ und } x_3 = 4$$

$$A_1 = \left| \int_0^4 (-0,6x^3 + 5,4x^2 - 12x) dx \right|$$

$$A_2 = \int_4^5 (-0,6x^3 + 5,4x^2 - 12x) dx$$

$$A_1 = \left| \left[-0,15x^4 + 1,8x^3 - 6x^2 \right]_0^4 \right|$$

$$A_2 = \left[-0,15x^4 + 1,8x^3 - 6x^2 \right]_4^5$$

$$A_1 = |[-19,2] - [0]|$$

$$A_2 = [-18,75] - [-19,2]$$

$$A_1 = |-19,2|$$

$$A_2 = 0,45FE$$

$$A_1 = 19,2FE$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 = 19,2 + 0,45 = 19,65FE$$

2. Aufgabe

$$a) \quad A = \int_0^1 (x + 21,5) dx \quad A = [22] - [0]$$

$$A = [0,5x^2 + 21,5x]_0^1 \quad A = 22FE$$

$$b) \quad f(x) = 0$$

lösen mit p-q ergibt $x_1 = 19$ und $x_2 = 3$

$$A = \int_3^{19} (-0,5x^2 + 11x - 28,5) dx \quad A = \left[\frac{1805}{6} \right] - [-40,5]$$

$$A = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5,5x^2 - 28,5x \right]_3^{19} \quad A = \frac{1024}{3} FE$$

c) Bei dieser Aufgabe gibt es zwei Möglichkeiten die gesuchte Fläche zu bestimmen.

Variante 1

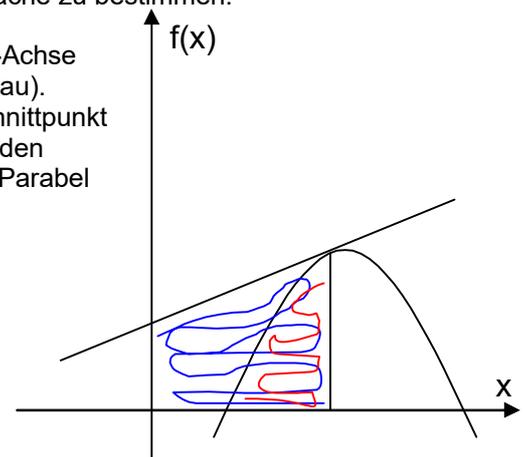
Man berechnet die Fläche, die von der Tangente $t(x)$ mit der x -Achse begrenzt wird von 0 bis Schnittpunkt der beiden Funktionen (blau). Dann ermittelt man den Flächeninhalt von 3 (Nullstelle) bis Schnittpunkt mit der Funktion $f(x)$ (rot). Nun bildet man die Differenz aus beiden Flächen, da man bei der ersten Fläche, den Bereich unter der Parabel zu viel mitberechnet hat.

$$f(x) = t(x)$$

$$-0,5x^2 + 11x - 28,5 = x + 21,5 \quad \text{umformen}$$

$$0 = 0,5x^2 - 10x + 50 : 0,5 \quad \text{und dann p-q-Formel ergibt}$$

$$x_{1/2} = 10 \quad (\text{doppelter Schnittpunkt, da Tangente})$$



$$A_1 = \int_0^{10} (x + 21,5) dx$$

$$A_1 = \left[0,5x^2 + 21,5x \right]_0^{10}$$

$$A_1 = [265] - [0]$$

$$A_1 = 265 \text{ FE}$$

$$A_2 = \int_3^{10} (-0,5x^2 + 11x - 28,5) dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 5,5x^2 - 28,5x \right]_3^{10}$$

$$A_2 = \left[\frac{295}{3} \right] - [-40,5]$$

$$A_2 = \frac{833}{6} \text{ FE}$$

$$A = A_1 - A_2 = 265 - \frac{833}{6} = \frac{757}{6} \text{ FE}$$

Variante 2

Hier wird die Gesamtfläche als Summe von Teilflächen bestimmt.
Die erste Teilfläche ist nur von x-Achse und $t(x)$ begrenzt.

$$A_1 = \int_0^3 (x + 21,5) dx$$

$$A_1 = \left[0,5x^2 + 21,5x \right]_0^3$$

$$A_1 = [69] - [0]$$

$$A_1 = 69 \text{ FE}$$

Die zweite Teilfläche wird von beiden Funktionen begrenzt. => Schnittpunkte

$$f(x) = t(x)$$

$$-0,5x^2 + 11x - 28,5 = x + 21,5$$

$$0 = 0,5x^2 - 10x + 50 \quad \text{aufzuleitende Funktion}$$

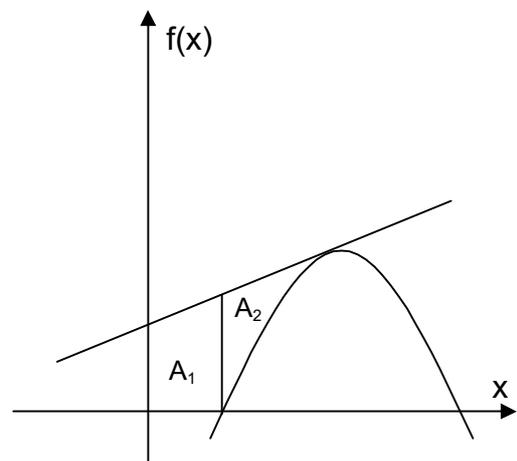
$$\text{lösen mit p-q ergibt } x_{1/2} = 10$$

$$A_2 = \int_3^{10} (0,5x^2 - 10x + 50) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + 50x \right]_3^{10}$$

$$A_2 = \left[\frac{500}{3} \right] - \left[\frac{219}{2} \right]$$

$$A_2 = \frac{343}{6} \text{ FE}$$



$$A = A_1 + A_2 = 69 + \frac{343}{6} = \frac{757}{6} \text{ FE}$$

Welchen Weg man wählt, muss jeder selbst

entscheiden. Der Rechenaufwand ist gleich.

3. Aufgabe

a) Fläche von $f(x)$ mit x-Achse => Nullstellen

$$f(x) = 0$$

$$0 = -x^3 + 2x^2 + 13x + 10 \quad | :(-1)$$

$$0 = x^3 - 2x^2 - 13x - 10 \quad \text{Polynomdivision mit } x_1 = -1 \text{ ergibt}$$

$$0 = x^2 - 3x - 10 \quad \text{p-q-Formel liefert } x_2 = 5 \text{ und } x_3 = -2$$

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{-1} (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10) dx \right|$$

$$A_2 = \int_{-1}^5 (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10) dx$$

$$A_1 = \left[-0,25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 6,5x^2 + 10x \right]_{-2}^{-1}$$

$$A_2 = \left[-0,25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 6,5x^2 + 10x \right]_{-1}^5$$

$$A_1 = \left[-\frac{53}{12} \right] - \left[-\frac{10}{3} \right]$$

$$A_2 = \left[\frac{1675}{12} \right] - \left[-\frac{53}{12} \right]$$

$$A_1 = \left| -\frac{13}{12} \right|$$

$$A_2 = 144 \text{ FE}$$

$$A_1 = \frac{13}{12} \text{ FE}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{13}{12} + 144 = \frac{1741}{12} \text{ FE}$$

- b) Hier macht man am besten eine Differenzrechnung. Man berechnet zuerst die Fläche von $f(x)$ mit der x -Achse im ersten Quadranten, dann die Fläche von $g(x)$ mit der x -Achse, und als Differenz erhält man die gesuchte, schraffierte Fläche.

Für die Berechnung der Fläche unter $g(x)$ benötigt man die Nullstelle als Grenze.

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A_1 = \int_0^5 (-x^3 + 2x^2 + 13x + 10) dx$$

$$A_2 = \int_0^2 (-2x + 4) dx$$

$$A_1 = \left[-0,25x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 6,5x^2 + 10x \right]_0^5$$

$$A_2 = \left[-x^2 + 4x \right]_0^2$$

$$A_1 = \left[\frac{1675}{12} \right] - [0]$$

$$A_2 = [4] - [0]$$

$$A_1 = \frac{1675}{12} \text{ FE}$$

$$A_2 = 4 \text{ FE}$$

$$A = A_1 - A_2 = \frac{1675}{12} - 4 = \frac{1627}{12} \text{ FE}$$

4. Aufgabe

Auch hier kommt man am besten durch eine Differenzrechnung zum Ergebnis. Erst die Gesamtfläche zwischen beiden Funktionen, dann die Fläche von $f_2(x)$ unterhalb der x -Achse und zuletzt die Differenz berechnen.

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow 0,5x^3 - 4x^2 + 8x = 0,1x^3 - 0,4x \text{ umformen}$$

$$0,4x^3 - 4x^2 + 8,4x = 0 \text{ Funktion zum Aufleiten}$$

Die Schnittpunkte und Nullstellen kann man aus der Zeichnung entnehmen.

$$A_1 = \int_0^3 (0,4x^3 - 4x^2 + 8,4x) dx$$

$$A_2 = \left| \int_0^2 (0,1x^3 - 0,4x) dx \right|$$

$$A_1 = \left[0,1x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4,2x^2 \right]_0^3$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{40}x^4 - 0,2x^2 \right]_0^2$$

$$A_1 = [9,9] - [0]$$

$$A_2 = \left[-\frac{2}{5} \right] - [0]$$

$$A_1 = 9,9 \text{ FE}$$

$$A_2 = \left| -\frac{2}{5} \right| \quad A_2 = 0,4 \text{ FE}$$

$$A = A_1 - A_2 = 9,9 - 0,4 = 9,5 \text{ FE}$$