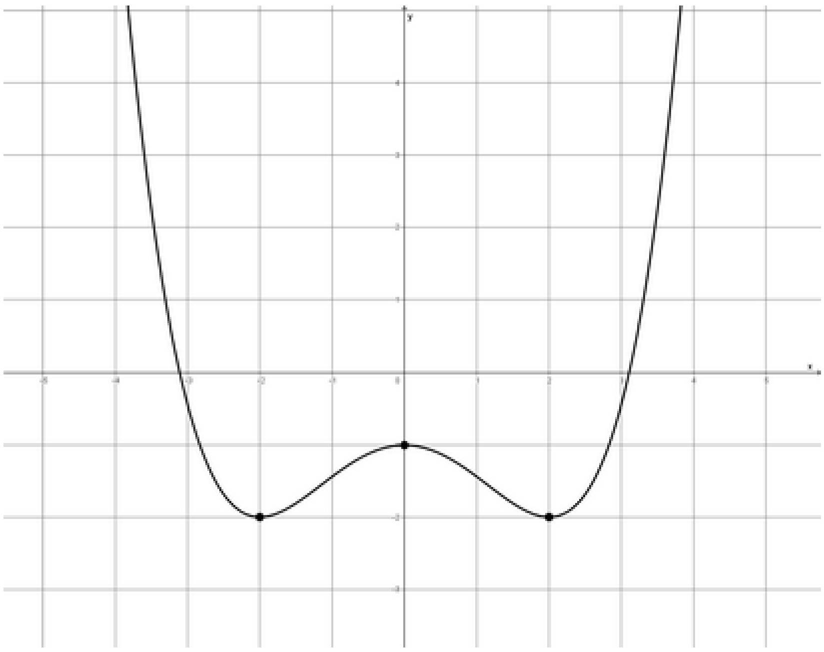
Lösungen BW E18

1. Aufgabe

a) Da Achsensymmetrie zur y-Achse angegeben ist, muss ein zweiter Tiefpunkt links von der y-Achse bei $T(-2|-2)$ und der mittlere von den drei Extrempunkten auf der y-Achse als Hochpunkt $H(0|-1)$ liegen.

b)



c) Der Graph kommt von oben und geht nach oben.

d) Da Achsensymmetrie zur y-Achse vorliegt, enthält die Funktionsgleichung nur Potenzen mit geraden Exponenten. $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Der Streckungsfaktor a lautet $a = \frac{1}{16}$ und die Konstante c ist mit -1 gegeben.

$f(x) = \frac{1}{16}x^4 + bx^2 - 1$

Da als einzige Unbekannte b übrig ist, kann man diese durch Einsetzen des Tiefpunktes $T(2|-2)$ berechnen.

$-2 = \frac{1}{16} \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 - 1$

$-2 = 1 + 4b - 1$

$-2 = 4b \,|\, : 4$

$b = -\frac{1}{2}$ => $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$

e) $f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \,\Big|\, : \frac{1}{16}$

$0 = x^4 - 8x^2 - 16$

$x^2 = z$

$0 = z^2 - 8z - 16$ p-q- Formel ergibt $z_1 \approx 9{,}66$ und $z_2 \approx -1{,}66$

$z = x^2$

$x^2 = 9{,}66 \,\big|\sqrt{}$ $\qquad$ $x^2 = -1{,}66 \,\big|\sqrt{}$

$x_1 \approx 3{,}11$ $\qquad$ $x_{3/4} = \text{n.l.}$

$x_2 \approx -3{,}11$

f) $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$ $\qquad$ $f''(x_W) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ $\qquad$ $0 = \frac{3}{4}x^2 - 1$ umformen und Wurzel ziehen ergibt

$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1$ $\qquad$ $x_{W1} \approx 1{,}15$

$f'''(x) = \frac{3}{2}x$ $\qquad$ $x_{W2} \approx -1{,}15$

$f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(1{,}15) = 1{,}725 > 0 \Rightarrow R-L-K$ $\qquad$ $f(1{,}15) \approx -1{,}55$ $\qquad$ $W_{R-L}(1{,}15|-1{,}55)$

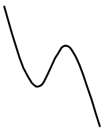
$f'''(-1{,},15) = -1{,}725 < 0 \Rightarrow L-R-K$ $\qquad$ $f(-1{,}15) \approx -1{,}55$ $\qquad$ $W_{L-R}(-1{,}15|-1{,}55)$

g) 1. Ableitung Punktsymmetrie zum Ursprung
2. Ableitung Achsensymmetrie zur y-Achse
3. Ableitung Punktsymmetrie zum Ursprung

<u>2. Aufgabe</u>

a) $h(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2$

1. $D = \mathbb{R}$ $\quad$ 2. $x \to -\infty; h(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; h(x) \to -\infty$



3. keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind

4. $S_y(0|0)$

$h(x) = 0$

$0 = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 \,|: (-0{,}001)$

$0 = x^3 - 90x^2$ ausklammern

$0 = x^2(x - 90)$

$x_{1/2} = 0$; $x_3 = 90$

$S_{x1/2}(0|0)$ $\qquad$ $S_{x3}(90|0)$

$h'(x) = -0{,}003x^2 + 0{,}18x$

$h''(x) = -0{,}006x + 0{,}18$

$h'''(x) = -0{,}006$

5. $h'(x) = 0$

$0 = -0{,}003x^2 + 0{,}18x$ umformen und x ausklammern ergibt

$x_1 = 0$ und $x_2 = 60$

$h'(x) = 0 \wedge h''(x) \neq 0$

$h''(0) = 0{,}18 > 0 \Rightarrow T$ $\qquad$ $h(0) = 0$ $\qquad$ $T(0|0)$

$h''(60) = -0{,}18 < 0 \Rightarrow H$ $\qquad$ $h(60) = 108$ $\qquad$ $H(60|108)$

6. $h''(x) = 0$

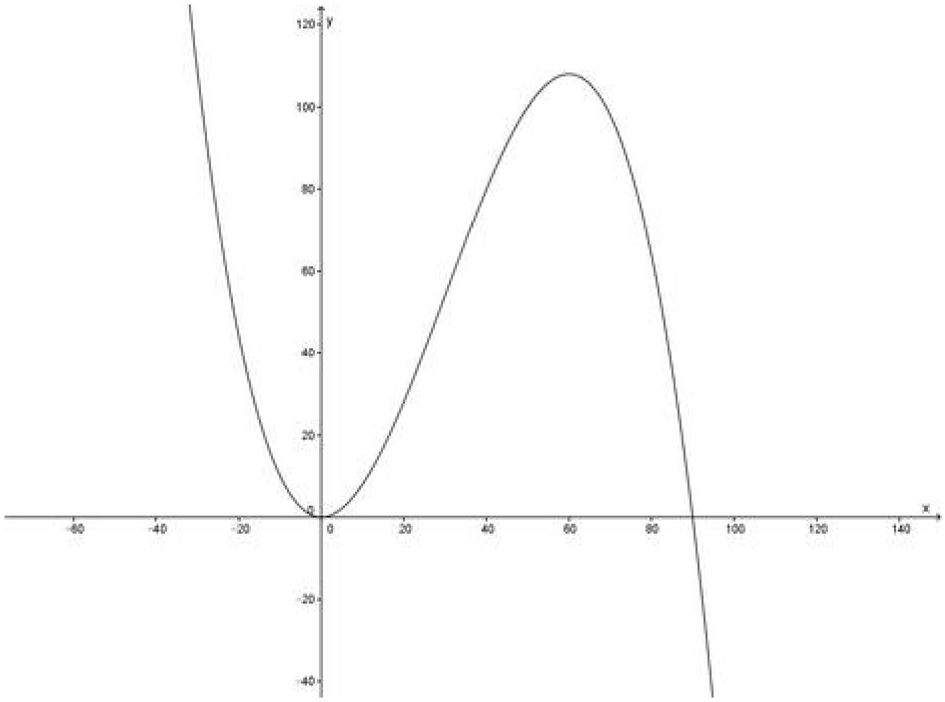
$0 = -0{,}006x + 0{,}18$ auflösen nach x ergibt

$x = 30$

$h''(x) = 0 \wedge h'''(x) \neq 0$

$h'''(30) = -0{,}006 < 0 \Rightarrow L - R - K \qquad h(30) = 54 \qquad W_{L-R}(30|54)$

7. Zeichnung



b) $h(10) = 8$

Am 10. Tag ist die Sonnenblume 8 cm hoch.

c) $h(x) = 28$ Die Höhe, also der y-Wert ist gegeben.

$28 = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 \,|-28$

$0 = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 - 28 \,|:(-0{,}001)$

$0 = x^3 - 90x^2 + 28000$ Polynomdivision mit $x_1 = 20$

$(x^3 - 90x^2 + 0x + 28000):(x-20) = x^2 - 70x - 1400$

p-q-Formel ergibt $x_2 \approx 86{,}2$ und $x_3 \approx -16{,}2$

Da die Beobachtung vom 0. Tag bis zum 60. Tag erfolgte, kommt nur die Lösung $x_1 = 20$ in Frage. ($x_2 = 86{,}2 \notin D$ und $x_3 = -16{,}2 \notin D$)

Die Sonnenblume war am 20. Tag 28 cm hoch.

d) Die größte Wachstumszunahme (Steigung) erfolgte im Wendepunkt.

$h'(30) = 2{,}7$

Am 30. Tag wuchs die Sonnenblume mit 2,7 cm pro Tag am schnellsten.

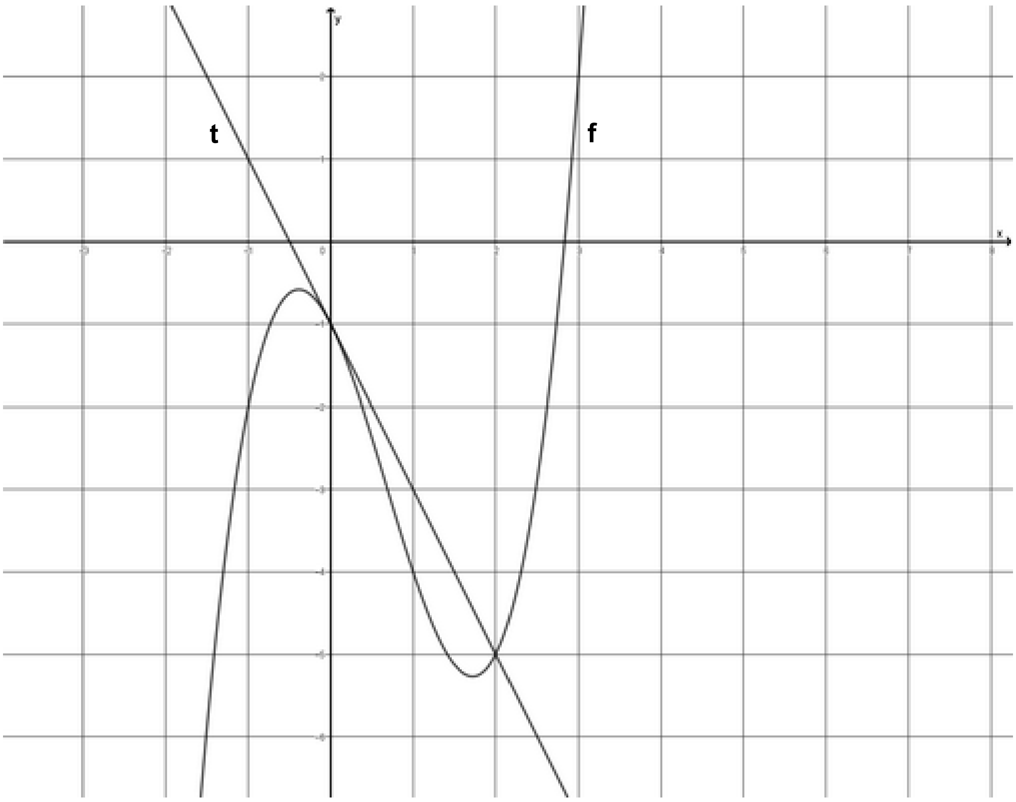
<u>3. Aufgabe</u>

a) $g(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \qquad t(x) = m \cdot x + b$

$g'(x) = 3x^2 - 4x - 2 \qquad -1 = -2 \cdot 0 + b$

$g(0) = -1 \qquad -1 = b$

$g'(0) = -2 \qquad t(x) = -2x - 1$



b) $t(x) = g(x)$

$-2x - 1 = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

$0 = x^3 - 2x^2$ ausklammern von x^2 und umformen ergibt

$x_{1/2} = 0$ und $x_3 = 2$

$g(2) = -5$

$S_3(2|-5)$

Es ist nur nach dem weiteren Schnittpunkt und nicht nach dem Berührpunkt gefragt.

c) $g'(x) = m$

$-3 = 3x^2 - 4x - 2$ umformen und p-q-Formel ergibt

$x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{3}$

4. Aufgabe

a) Hier muss man erst den linken Wendepunkt berechnen, dann die Tangente ermitteln und am Ende den Abstand als Differenz berechnen.

$f(x) = 2{,}5x^4 - 15x^2 + 20$	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'(x) = 10x^3 - 30x$	$0 = 30x^2 - 30 \mid + 30$	$f'''(-1) = -60 < 0 \Rightarrow L-R-K$
$f''(x) = 30x^2 - 30$	$30 = 30x^2 \mid : 30 \mid \sqrt{\ }$	$f(-1) = 7{,}5$ => $W_{L-R}(-1\|7{,}5)$
$f'''(x) = 60x$	$x_1 = 1 \notin D$ und $x_2 = -1$	

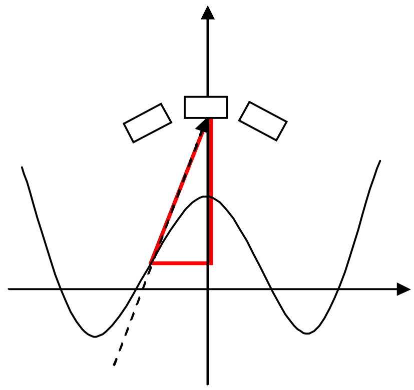
$f'(x) = m$ also $f'(-1) = 20$

$t(x) = m \cdot x + b$

Durch Einsetzen von m und W ergibt sich $b = 27{,}5$ also $t(x) = 20x + 27{,}5$.

Der Abstand ist das Stück zwischen Tangente und Kurve auf der y-Achse!
Die Funktion f(x) hat auf der y-Achse den Wert 20 und die Tangente 27,5.
$27{,}5 - 20 = 7{,}5$ Der Abstand beträgt 7,5m.

b) Der tangential zurückgelegte Weg ist die lange Seite eines rechtwinkligen Dreiecks. Die längste Seite muss mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden. Die Seite in x-Richtung beträgt 1, die Seite in y-Richtung beträgt 20. (Wendepunkt $(-1|7{,}5)$ und $S_y(0|27{,}5)$ der Tangente benutzen)



$a^2 + b^2 = c^2$

$(-1)^2 + 20^2 = c^2$

$401 = c^2 \,|\sqrt{}$

$c \approx 20{,}02$ Der tangential zurückgelegte Weg beträgt 20m.