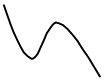
Lösungen BW C18

1. <u>Aufgabe</u>

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \to -\infty; f(x) \to +\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to -\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von oben und geht nach unten.) 

3. Punktsymmetrie (PS), da nur ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \;\Big|\; : \left(-\frac{1}{3}\right)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^3 - 9x$

$0 = x(x^2 - 9)$ x ausklammern

$x_{N1} = 0 \qquad x^2 - 9 = 0 \;|\; +9$

$x^2 = 9 \;|\; \sqrt{\ }$

$x_{N2} = 3 \qquad S_{x1}(0|0) \quad S_{x2}(3|0) \quad S_{x3}(-3|0)$

$x_{N3} = -3$

Ableitungen

$f'(x) = -x^2 + 3$

$f''(x) = -2x$

$f'''(x) = -2$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -x^2 + 3 \;|\; + x^2$

$x^2 = 3 \;|\; \sqrt{\ }$

$x_{E1} \approx 1{,}73$

$x_{E2} \approx -1{,}73$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(1{,}73) = -3{,}46 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-1{,}73) = 3{,}46 > 0 \Rightarrow T$

3. Schritt

$f(1{,}73) \approx 3{,}46 \qquad H(1{,}73|3{,}46)$

$f(-1{,}73) \approx -3{,}46 \qquad T(-1{,}73|-3{,}46)$

$M_1 = \left]-\infty; -1{,}73\right]$ monoton fallend

$M_2 = \left[-1{,}73; 1{,}73\right]$ monoton steigend

$M_3 = \left[1{,}73; +\infty\right[$ monoton fallend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -2x \;|\; : (-2)$

$0 = x_W$

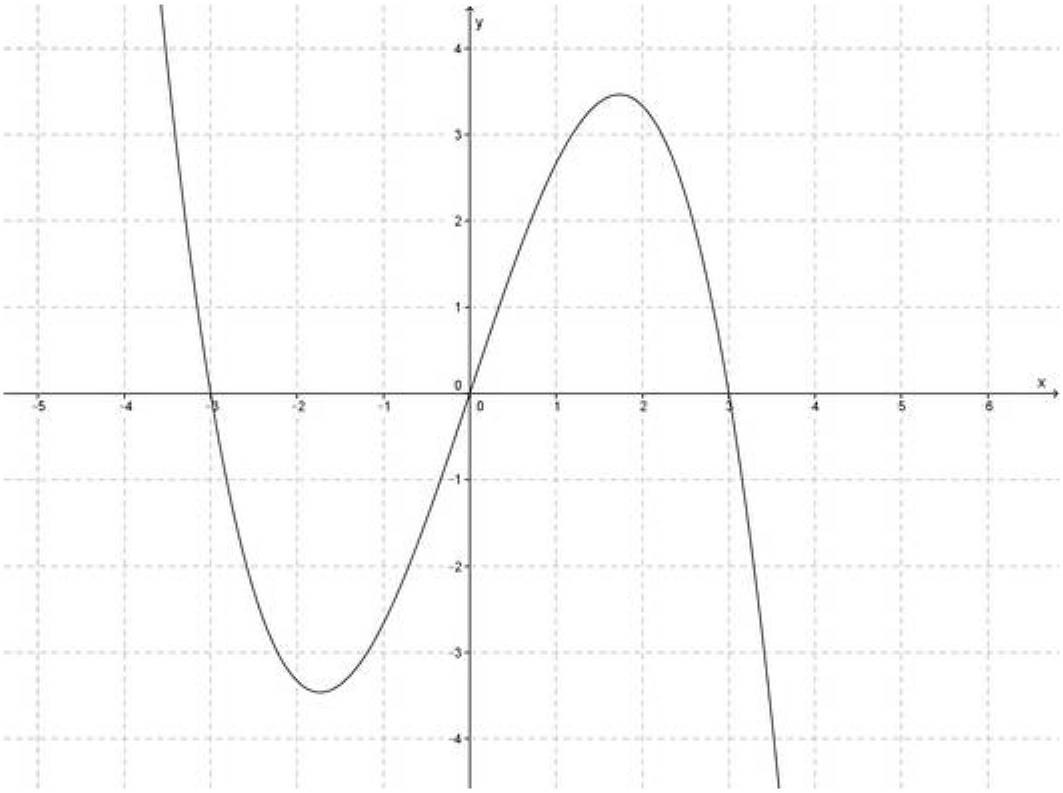
2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(0) = -2 < 0 \Rightarrow L - R - K$

3. Schritt

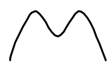
$f(0) = 0 \qquad W_{L-R}(0|0)$

7. Zeichnung



b) $f(x) = -0{,}2x^4 + 2x^2 - 1{,}8$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \to -\infty; f(x) \to -\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to -\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von unten und geht nach unten.) 

3. Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-1{,}8)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -0{,}2x^4 + 2x^2 - 1{,}8 \,|: (-0{,}2)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^4 - 10x^2 + 9$

$x^2 = z$ Substitution

$0 = z^2 - 10z + 9$

$z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$

$z_1 = 9 \quad z_2 = 1$

$z = x^2$ Resubstitution

$x^2 = 9 |\sqrt{\ } \quad x^2 = 1 |\sqrt{\ }$

$x_{N1} = 3 \quad x_{N3} = 1$

$x_{N2} = -3 \quad x_{N4} = -1$ $S_{x1}(3|0) \;\; S_{x2}(-3|0) \;\; S_{x3}(1|0) \;\; S_{x4}(-1|0)$

Ableitungen
$$f'(x) = -0{,}8x^3 + 4x$$
$$f''(x) = -2{,}4x^2 + 4$$
$$f'''(x) = -4{,}8x$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -0{,}8x^3 + 4x \,|: (-0{,}8)$

$0 = x^3 - 5x$

$0 = x(x^2 - 5)$

$x_{E1} = 0 \qquad x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5 \,|\sqrt{}$

$x_{E2} \approx 2{,}24$

$x_{E3} \approx -2{,}24$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow T$

$f''(2{,}24) \approx -8{,}04 < 0 \Rightarrow H$

$f''(-2{,}24) \approx -8{,}04 < 0 \Rightarrow H$

3. Schritt

$f(0) = -1{,}8 \qquad T(0|-1{,}8)$

$f(2{,}24) \approx 3{,}20 \qquad H(2{,}24|3{,}20)$

$f(-2{,}24) \approx 3{,}20 \qquad H(-2{,}24|3{,}20)$

$M_1 =]-\infty;-2{,}24]$	monoton steigend
$M_2 = [-2{,}24;0]$	monoton fallend
$M_3 = [0;2{,}24]$	monoton steigend
$M_4 = [2{,}24;+\infty[$	monoton fallend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = -2{,}4x^2 + 4 \,| + 2{,}4x^2$

$2{,}4x^2 = 4 \,|: 2{,}4$

$x^2 = \frac{5}{3} \,|\sqrt{}$

$x_{W1} \approx 1{,}29$

$x_{W2} \approx -1{,}29$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$

$f'''(1{,}29) \approx -6{,}19 < 0 \Rightarrow L - R - K$

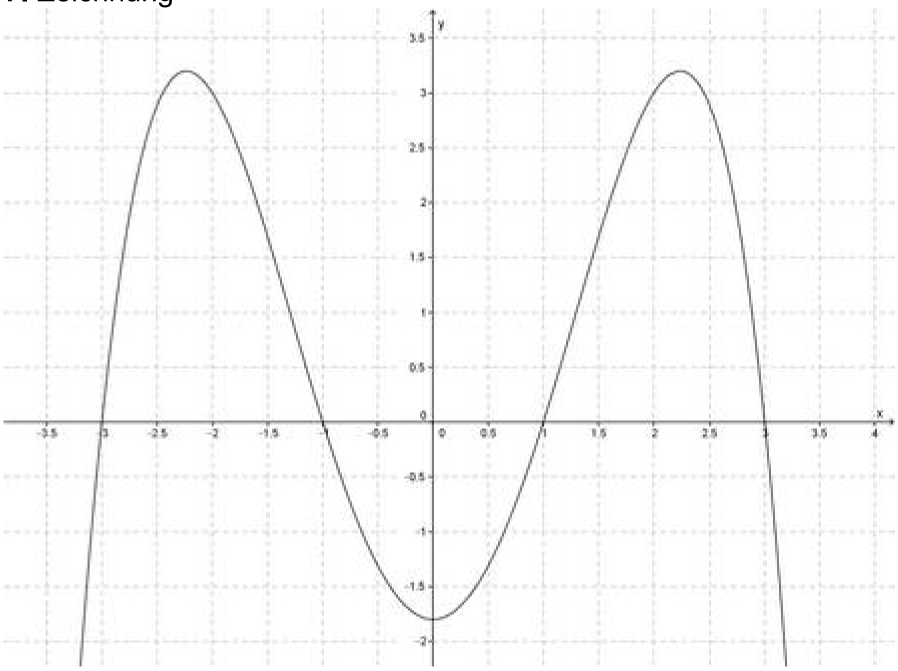
$f'''(-1{,}29) \approx 6{,}19 > 0 \Rightarrow R - L - K$

3. Schritt

$f(1{,}29) \approx 0{,}97 \qquad W_{L-R}(1{,}29|0{,}97)$

$f(-1{,}29) \approx 0{,}97 \qquad W_{R-L}(-1{,}29|0{,}97)$

7. Zeichnung



c) $f(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}6x^3 + 0{,}4x^2 + 2{,}4x - 3{,}2$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \to -\infty; f(x) \to +\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to +\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von oben und geht nach oben.) 

3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-3{,}2)$

$f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}1x^4 - 0{,}6x^3 + 0{,}4x^2 + 2{,}4x - 3{,}2 \,|: 0{,}1$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 24x - 32$ Horner-Schema mit TR: $x_{N1} = -2$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-6	4	24	-32	
0	1	-8	20	-16	0

$x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = 0$ Horner-Schema mit TR: $x_{N2} = +2$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-8	20	-16	
0	1	-6	8	0

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{N3/4} = +3 \pm \sqrt{9-8}$

$x_{N3} = 4$

$x_{N4} = 2$

$S_{x1}(-2|0)$ $S_{x2/4}(2|0)$ $S_{x3}(4|0)$

doppelte Nullstelle = Extrempunkt

Ableitungen

$f'(x) = 0{,}4x^3 - 1{,}8x^2 + 0{,}8x + 2{,}4$

$f''(x) = 1{,}2x^2 - 3{,}6x + 0{,}8$

$f'''(x) = 2{,}4x - 3{,}6$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = 0{,}4x^3 - 1{,}8x^2 + 0{,}8x + 2{,}4 \,|: 0{,}4$

$0 = x^3 - 4{,}5x^2 + 2x + 6$

Horner-Schema mit TR: $x_{E1} = +2$ ergibt: $x^2 - 2{,}5x - 3 = 0$

$x^2 - 2{,}5x - 3 = 0$ mit pq-Formel: $x_{E2} \approx 3{,}39$ und $x_{E3} \approx -0{,}89$

2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ 3. Schritt

$f''(2) = -1{,}6 < 0 \Rightarrow H$ $f(2) = 0$ $H(2|0)$

$f''(3{,}39) \approx 2{,}39 > 0 \Rightarrow T$ $f(3{,}39) \approx -0{,}64$ $T(3{,}39|-0{,}64)$

$f''(-0{,}89) \approx 4{,}95 > 0 \Rightarrow T$ $f(-0{,}89) \approx -4{,}53$ $T(-0{,}89|-4{,}53)$

$M_1 =]-\infty;-0{,}89]$ monoton fallend
$M_2 = [-0{,}89;2]$ monoton steigend
$M_3 = [2;3{,}39]$ monoton fallend
$M_4 = [3{,}39;+\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W) = 0$

$0 = 1{,}2x^2 - 3{,}6x + 0{,}8 \,|: 1{,}2$

$0 = x^2 - 3x + \frac{2}{3}$

$x_{W1/2} = +1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - \frac{2}{3}}$

$x_{W1} \approx 2{,}76$

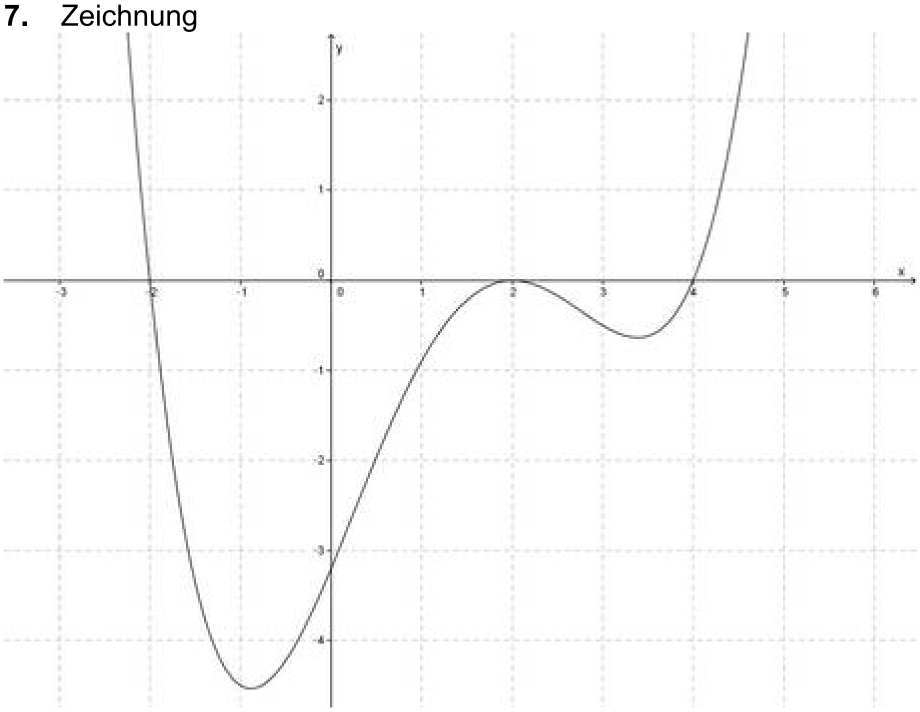
$x_{W1} \approx 0{,}24$

2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$ 3. Schritt

$f'''(2{,}76) \approx 3{,}02 > 0 \Rightarrow R-L-K$ $f(2{,}76) \approx -0{,}34$ $W_{R-L}(2{,}76|-0{,}34)$

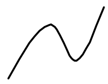
$f'''(0{,}24) \approx -3{,}02 < 0 \Rightarrow L-R-K$ $f(0{,}24) \approx -2{,}54$ $W_{L-R}(0{,}24|-2{,}54)$

7. Zeichnung



d) $f(x)=\frac{2}{5}x^3+\frac{9}{5}x^2-\frac{27}{5}$

1. Definitionsbereich: $D=R$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x\to-\infty; f(x)\to-\infty \\ x\to+\infty; f(x)\to+\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von unten und geht nach oben.) 

3. keine Symmetrie (KS), da gerade und ungerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-5{,}4)$

$f(x_N)=0$

$0=\frac{2}{5}x^3+\frac{9}{5}x^2-\frac{27}{5}\,\Big|:\left(\frac{2}{5}\right)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0=x^3+4{,}5x^2-13{,}5$ Polynomdivision mit $x_{N1}=-3$ (TR)

$$
\begin{aligned}
&(x^3+4{,}5x^2+0x-13{,}5):(x+3)=x^2+1{,}5x-4{,}5\\
&\underline{-(x^3+3x^2)}\\
&\quad 1{,}5x^2+0x\\
&\quad \underline{-(1{,}5x^2+4{,}5x)}\\
&\qquad -4{,}5x-13{,}5\\
&\qquad \underline{-(-4{,}5x-13{,}5)}\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}
$$

$x_{N2/3}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+4{,}5}$ pq-Formel

$x_{N2}=1{,}5$

$x_{N3}=-3$

$S_{x1/3}(-3|0)$ $S_{x2}(1{,}5|0)$ doppelte Nullstelle = Extrempunkt

Ableitungen
$f'(x)=1{,}2x^2+3{,}6x$
$f''(x)=2{,}4x+3{,}6$
$f'''(x)=2{,}4$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E)=0$

$0=1{,}2x^2+3{,}6x\,|:1{,}2$

$0=x^2+3x$

$0=x(x+3)$

$x_{E1}=0$

$x_{E2}=-3$

2. Schritt $f'(x_E)=0\wedge f''(x_E)\neq 0$

$f''(0)=3{,}6>0\Rightarrow T$

$f''(-3)=-3{,}6<0\Rightarrow H$

3. Schritt

$f(0)=-5{,}4$ $T(0|-5{,}4)$

$f(-3)=0$ $H(-3|0)$

$M_1=]-\infty;-3]$ monoton steigend

$M_2=[-3;0]$ monoton fallend

$M_3=[0;+\infty[$ monoton steigend

6. Wendepunkte:

1. Schritt $f''(x_W)=0$

$0=2{,}4x+3{,}6\,|-3{,}6|:2{,}4$

$-1{,}5=x_W$

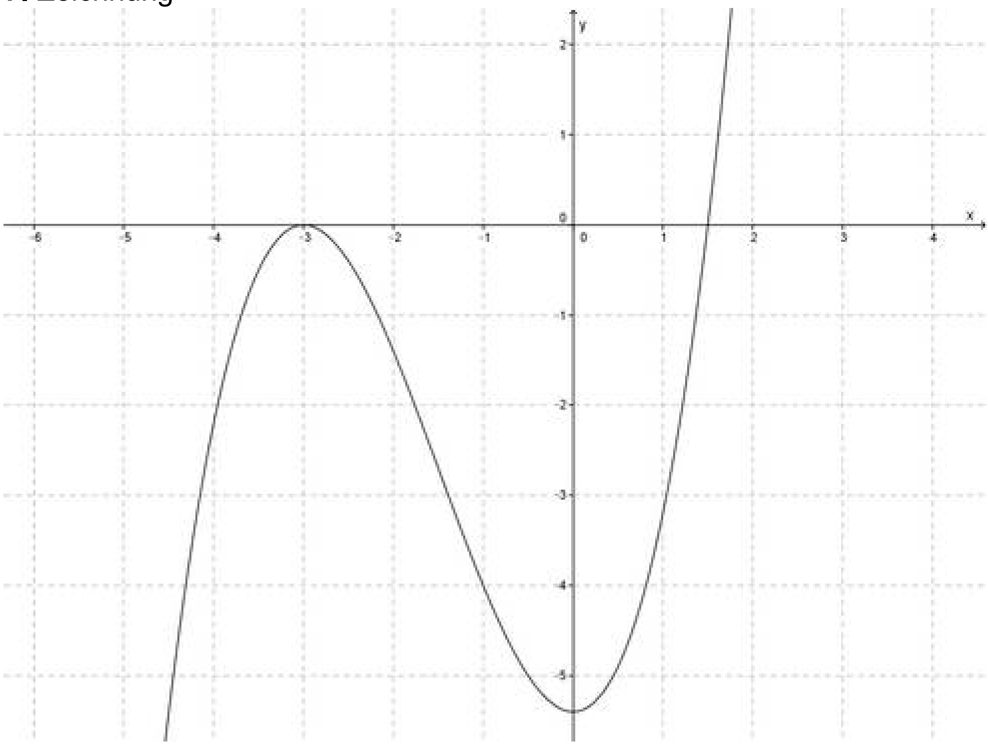
2. Schritt $f''(x_W)=0\wedge f'''(x_W)\neq 0$

$f'''(-1{,}5)=2{,}4>0\Rightarrow R-L-K$

3. Schritt

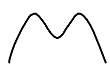
$f(-1{,}5)=-2{,}7$ $W_{R-L}(-1{,}5|-2{,}7)$

7. Zeichnung



e) $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$

1. Definitionsbereich: $D = R$

2. Verlauf: $\begin{matrix} x \to -\infty; f(x) \to -\infty \\ x \to +\infty; f(x) \to -\infty \end{matrix}$ (Der Graph kommt von unten und geht nach unten.) 

3. Achsensymmetrie (AS), da nur gerade Exponenten vorhanden

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|1)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -x^4 + 3x^2 + 1 |:(-1)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht)

$0 = x^4 - 3x^2 - 1$

$x^2 = z$ Substitution

$0 = z^2 - 3z - 1$

$z_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 1}$

$z_1 \approx 3{,}30 \quad z_2 \approx -0{,}30$

$z = x^2$ Resubstitution

$x^2 = 3{,}3 |\sqrt{\ }$ $\qquad x^2 = -0{,}30 |\sqrt{\ }$

$x_{N1} \approx 1{,}82$ $\qquad x_{N3/4} = \text{n.l.}$

$x_{N2} \approx -1{,}82$ $\qquad S_{x1}(1{,}82|0) \quad S_{x2}(-1{,}82|0)$

Ableitungen

$$f'(x) = -4x^3 + 6x$$
$$f''(x) = -12x^2 + 6$$
$$f'''(x) = -24x$$

5. Extrempunkte und Monotonie:

1. Schritt $f'(x_E) = 0$	2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = -4x^3 + 6x \mid : (-4)$	$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow T$	$f(0) = 1$	$T(0 \mid 1)$
$0 = x^3 - 1{,}5x$	$f''(1{,}22) \approx -11{,}86 < 0 \Rightarrow H$	$f(1{,}22) \approx 3{,}25$	$H(1{,}22 \mid 3{,}25)$
$0 = x(x^2 - 1{,}5)$	$f''(-1{,}22) \approx -11{,}86 < 0 \Rightarrow H$	$f(-1{,}22) \approx 3{,}25$	$H(-1{,}22 \mid 3{,}25)$

$x_{E1} = 0 \qquad x^2 - 1{,}5 = 0$

$x^2 = 1{,}5 \mid \sqrt{}$

$x_{E2} \approx 1{,}22$

$x_{E3} \approx -1{,}22$

$M_1 = \left]-\infty; -1{,}22\right]$ monoton steigend

$M_2 = \left[-1{,}22; 0\right]$ monoton fallend

$M_3 = \left[0; 1{,}22\right]$ monoton steigend

$M_4 = \left[1{,}22; +\infty\right[$ monoton fallend

6. Wendepunkte:

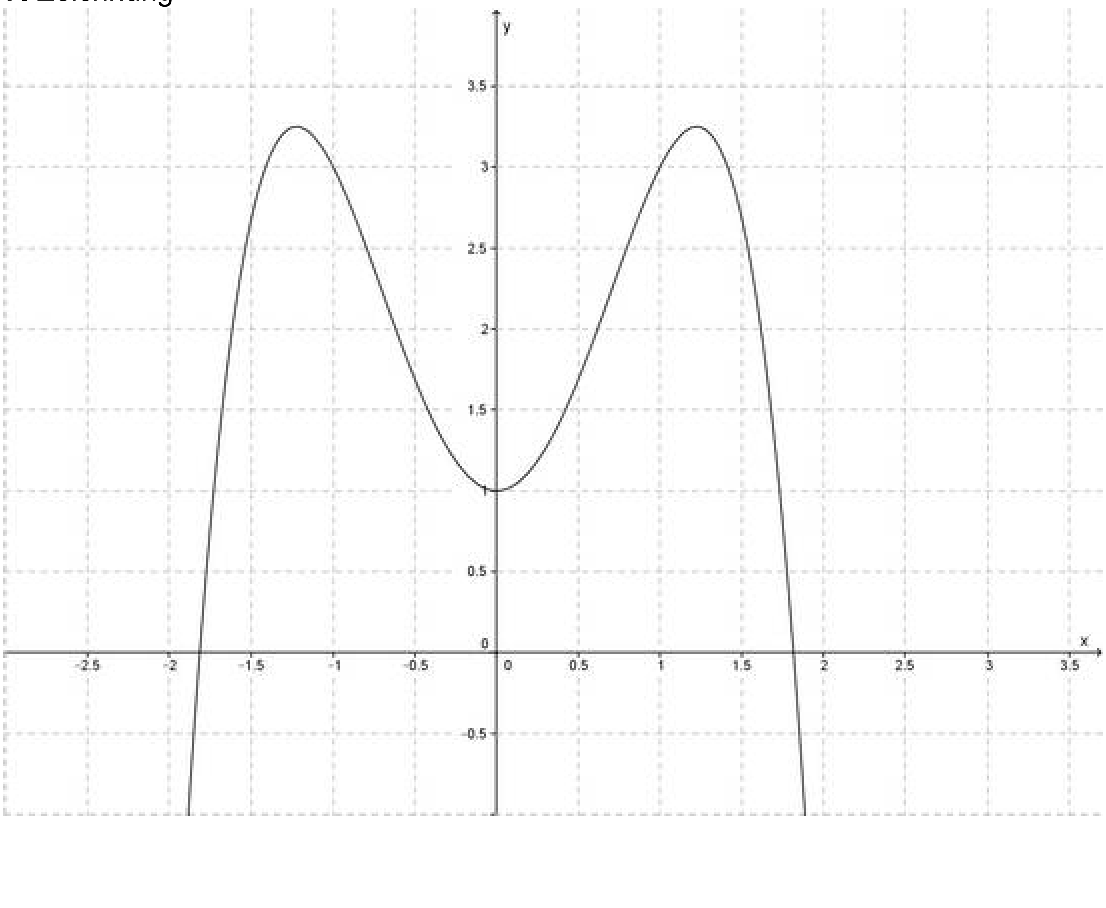
1. Schritt $f''(x_W) = 0$	2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$	3. Schritt	
$0 = -12x^2 + 6 \mid + 12x^2$	$f'''(0{,}71) = -17{,}04 < 0 \Rightarrow L-R-K$	$f(0{,}71) \approx 2{,}26$	$W_{L-R}(0{,}71 \mid 2{,}26)$
$12x^2 = 6 \mid : 12$	$f'''(-1{,}29) = 17{,}04 > 0 \Rightarrow R-L-K$	$f(-0{,}71) \approx 2{,}26$	$W_{R-L}(-0{,}71 \mid 2{,}26)$

$x^2 = 0{,}5 \mid \sqrt{}$

$x_{W1} \approx 0{,}71$

$x_{W2} \approx -0{,}71$

7. Zeichnung



2. Aufgabe

a)

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^3 - 3x = 3x^2 - 2 \; \left| -3x^2 + 2 \right.$$

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \; |:2$$

$$x^3 - 1{,}5x^2 - 1{,}5x + 1 = 0$$ Polynomdivision mit $x_1 = -1$ (TR)

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 1{,}5x^2 - 1{,}5x + 1) : (x+1) = x^2 - 2{,}5x + 1 \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -2{,}5x^2 - 1{,}5x \\
\quad \underline{-(-2{,}5x^2 - 2{,}5x)} \\
\qquad\qquad x + 1 \\
\qquad\quad \underline{-(x+1)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x_{2/3} = +\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}$$ pq-Formel

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 0{,}5$$

x-Werte einsetzen in eine der beiden Ausgangsfunktionen:

$g(-1) = 1 \quad g(2) = 10 \quad f(0{,}5) = -1{,}25$

$S_1(-1|1) \quad S_2(2|10) \quad S_3(0{,}5|-1{,}25)$

b)

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^4 - 6x = -2x^2 - 6x + 4 \; \left| +2x^2 + 6x - 4 \right.$$

$$2x^4 + 2x^2 - 4 = 0 \; |:2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$x^2 = z$ Substitution

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$z_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 2}$$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = -2$

$z = x^2$ Resubstitution

$x^2 = 1 \,|\sqrt{} \qquad x^2 = -2 \,|\sqrt{}$

$x_1 = 1 \quad x_{3/4} = \text{n.l.}$

$x_2 = -1$

$f(1) = -4 \qquad f(-1) = 8$

$S_1(1|-4) \qquad S_2(-1|8)$

3. Aufgabe

Graph A: Funktion 4. Grades

positives Vorzeichen vor der höchsten Potenz (Graph kommt von oben und geht nach oben)

Achsensymmetrie zur y-Achse, also nur gerade Exponenten in der Gleichung

$S_y(0|1)$ und $S_{x1}(-2|0)$ $S_{x2}(2|0)$ $S_{x3}(-1|0)$ $S_{x4}(1|0)$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$f(x) = a(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$$

$$f(x) = a(x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

$$f(x) = a(x^4 - 5x^2 + 4)$$

Einsetzen von $S_y(0|1)$ ergibt:

$$1 = a \cdot 4 \;\Rightarrow a = 0{,}25$$

$$f(x) = 0{,}25(x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$f(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}25x^2 + 1$$

Graph B: Funktion 2. Grades

positives Vorzeichen vor der höchsten Potenz (Graph kommt von oben und geht nach oben)

keine Symmetrie, also gerade und ungerade Exponenten in der Gleichung

$S_y(0|4)$ und keine Schnittpunkte mit der x-Achse

Scheitel bei $S(1|3)$ und Streckungsfaktor 1

$f(x) = 1(x-1)^2 + 3$

$f(x) = 1(x^2 - 2x + 1) + 3$

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

Graph C: Funktion 3. Grades

negatives Vorzeichen vor der höchsten Potenz (Graph kommt von oben und geht nach unten)

keine Symmetrie, also gerade und ungerade Exponenten in der Gleichung

$S_y(0|0)$ und $S_{x1}(0|0)$ $S_{x2}(2|0)$ $S_{x3}(3|0)$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$f(x) = a(x-0)(x-2)(x-3)$

$f(x) = a \cdot x(x^2 - 5x + 6)$

$f(x) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$

Einsetzen von $P(1|-2)$ ergibt:

$-2 = a \cdot 2 \;\Rightarrow a = -1$

$f(x) = -(x^3 - 5x^2 + 6x)$

$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$