

Lösungen BW A18

1. Aufgabe

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Polynomdivision mit z.B. TR: $x_1 = -1$
 $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x + 1) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) \\ -(x^3 + 1x^2) \\ \hline -5x^2 + x \\ -(-5x^2 - 5x) \\ \hline 6x + 6 \\ -(6x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Horner-Schema mit z.B. TR: $x_1 = -1$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-4	1	6	
0	1	-5	6	0

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Rechnungen (im Kopf)

$0 \cdot (-1) + 1 = 1$

$1 \cdot (-1) - 4 = -5$

$-5 \cdot (-1) + 1 = 6$

$6 \cdot (-1) + 6 = 0$

p-q-Formel

$x_{2/3} = +2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$

$x_2 = 3$

$x_3 = 2$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ biquadratische Gleichung, Substitution

$x^2 = z$

$z^2 - 29z + 100 = 0$ p-q-Formel

$z_{1/2} = +14,5 \pm \sqrt{14,5^2 - 100}$

$z_1 = 25$

$z_2 = 4$

Resubstitution mit

$z = x^2$

$x^2 = 25 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = -5$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_3 = 2 \quad ; \quad x_4 = -2$

c) $(x - 4)(x + 3) = (x + 5)^2 - 4$ Ausmultiplizieren der Klammern, binomische Formel

$x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 + 10x + 25 - 4$

$x^2 - x - 12 = x^2 + 10x + 21 \quad | -x^2$

$-x - 12 = 10x + 21 \quad | -10x + 12$

$-11x = 33 \quad | :(-11)$

$x = -3$

d) $x^3 - 5x^2 + 3x = 0$ Ausklammern von x

$x \cdot (x^2 - 5x + 3) = 0$

$x_1 = 0 \quad ; \quad x^2 - 5x + 3 = 0$ p-q-Formel

$x_{2/3} = +2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 3}$

$x_2 \approx 4,30$

$x_3 \approx 0,70$

ACHTUNG: Rundungszeichen verwenden!

Auf zwei Kommastellen runden!

e) $x^3 + 6x^2 = 0$ Ausklammern von x^2
 $x^2 \cdot (x + 6) = 0$
 $x^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$; $x + 6 = 0 \quad | -6$
 $x_{1/2} = 0$; $x_3 = -6$

f) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 16 = 0 \quad | : \frac{1}{4}$
 $x^4 + 10x^2 + 64 = 0$
 $x^2 = z$
 $z^2 + 10z + 64 = 0$ p-q-Formel
 $z_{1/2} = -5 \pm \sqrt{25 - 64}$
 $z_{1/2} = \text{n.l.} \Rightarrow$ keine x-Werte vorhanden

g) $0,4x^3 + 1,2x^2 - 5,2x - 6 = 0$
Horner-Schema mit TR: $x_1 = -1$

x^3	x^2	x^1	x^0	
0,4	1,2	-5,2	-6	
0	0,4	0,8	-6	0

$0,4x^2 + 0,8x - 6 = 0 \quad | : 0,4$ oder vor dem Horner-Schema :0,4 rechnen
 $x^2 + 2x - 15 = 0$ p-q-Formel
 $x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 15}$
 $x_2 = 3$
 $x_3 = -5$

h) $-5x^2 + 20x = 0 \quad | : (-5)$
 $x^2 - 4x = 0$ Ausklammern von x
 $x(x - 4) = 0$
 $x_1 = 0$; $x_2 = 4$

i) $-\frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + 1,5 = 0 \quad | : (-\frac{1}{4})$
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$
Horner-Schema mit TR: $x_1 = 1$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	4	1	-6	
0	1	5	6	0

$x^2 + 5x + 6 = 0$ p-q-Formel
 $x_{2/3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$
 $x_2 = -2$
 $x_3 = -3$

j) $-0,5x^4 + 5x^2 - 4,5 = 0 \quad | :(-0,5)$
 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ Substitution
 $x^2 = z$
 $z^2 - 10z + 9 = 0$ p-q-Formel
 $z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 9}$
 $z_1 = 9$
 $z_2 = 1$
 $z = x^2$ Resubstitution
 $x^2 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$ $x_1 = 3$; $x_2 = -3$
 $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad}$ $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

k) $\frac{1}{5}x^3 - x - 20 = 0 \quad | : \frac{1}{5}$
 $x^3 - 5x - 100 = 0$
 Horner-Schema mit TR: $x_1 = 5$

x^3	x^2	x^1	x^0
1	0	-5	-100
0	1	5	20 0

$x^2 + 5x + 20 = 0$ p-q-Formel
 $x_{2/3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 20}$
 $x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$

l) $-x^2 + 81 = 0$
 $x^2 = 81 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x_1 = 9$
 $x_2 = -9$

m) $0,5x^4 - 8x^2 = 0$
 $x^4 - 16x^2 = 0$ Ausklammern von x^2
 $x^2(x^2 - 16) = 0$
 $x_{1/2} = 0$; $x^2 - 16 = 0 \quad | +16 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x_3 = 4$
 $x_4 = -4$

n) $-3(x - 1) = -4(-2 - x) + 2$ Klammern auflösen
 $-3x + 3 = 8 + 4x + 2$
 $-3x + 3 = 4x + 10 \quad | +3x - 10$
 $-7 = 7x \quad | :7$
 $x = -1$

$$\text{o) } \frac{5}{6}x + 15 = 0 \quad | -15$$

$$\frac{5}{6}x = -15 \quad | : \frac{5}{6}$$

$$x = -18$$

$$\text{p) } 3x^3 - 8,5x^2 - 4,5 = 0 \quad \text{Nicht durch Faktor 3 dividieren, da Brüche entstehen!}$$

Horner-Schema mit TR: $x_1 = 3$

$$\begin{array}{cccc} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ 3 & -8,5 & 0 & -4,5 \\ 0 & 3 & 0,5 & 1,5 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 + 0,5x + 1,5 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x + 0,5 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 - 0,5}$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

$$\text{q) } -0,5x^2 - 4,5x - 4 = 0 \quad | :(-0,5)$$

$$x^2 + 9x + 8 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = -4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 8}$$

$$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = -8$$

$$\text{r) } \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0 \quad \text{Nicht durch Faktor dividieren, da neue Brüche entstehen!}$$

Horner-Schema mit TR: $x_1 = 1$

$$\begin{array}{cccc} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array}$$

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad | : \frac{3}{4}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}}$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

s) $4x^4 - 6x^3 = 0$
 $x^3(4x - 6) = 0$ Ausklammern von x^3
 $x^3 = 0 \quad | \sqrt[3]{}$; $4x - 6 = 0$
 $x_{1/2/3} = 0$ $x_4 = 1,5$

t) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7x = 0 \quad | : \frac{1}{2}$
 $x^3 - 0,5x^2 - 14x = 0$ Ausklammern von x
 $x(x^2 - 0,5x - 14) = 0$
 $x_1 = 0$; $x^2 - 0,5x - 14 = 0$ p-q-Formel
 $x_{2/3} = 0,25 \pm \sqrt{0,25^2 + 14}$
 $x_2 = 4$
 $x_3 = -3,5$

u) $-3x^4 + 21x^2 - 36 = 0 \quad | : (-3)$
 $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ Substitution
 $x^2 = z$
 $z^2 - 7z + 12 = 0$ p-q-Formel
 $z_{1/2} = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 12}$
 $z_1 = 4$
 $z_2 = 3$
 $z = x^2$
 $x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$ $x_1 = 2$; $x_2 = -2$
 $x^2 = 3 \quad | \sqrt{}$ $x_3 \approx 1,73$; $x_4 \approx -1,73$

v) $0,1x^3 - 0,2x^2 - 0,4x + 0,8 = 0 \quad | : 0,1$
 $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
Horner-Schema mit TR: $x_1 = 2$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-2	-4	8	
0	1	0	-4	0

$x^2 - 4 = 0 \quad | +4 \quad | \sqrt{}$
 $x_2 = 2$ (doppelte Lösung)
 $x_3 = -2$

$$w) \quad -\frac{1}{5}x^4 + 2x^3 - 5x^2 = 0 \quad \left| : \left(-\frac{1}{5}\right) \right.$$

$$x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0 \quad \text{Ausklammern von } x^2$$

$$x^2(x^2 - 10x + 25) = 0$$

$$x_{1/2} = 0 \quad ; \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{3/4} = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$$

$$x_{3/4} = 5$$

$$x) \quad x^4 - 18x^2 + 81 = 0 \quad \text{Substitution}$$

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 18z + 81 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$z_{1/2} = 9 \pm \sqrt{81 - 81}$$

$$z_1 = 9$$

beide Lösungen schreiben, da jedes z zurückgetauscht wird

$$z_2 = 9$$

und jedes Mal die Wurzel gezogen werden muss

$$z = x^2$$

$$x^2 = 9 \quad \left| \sqrt{\quad} \right.$$

$$x^2 = 9 \quad \left| \sqrt{\quad} \right. \quad x_{1/3} = 3 \quad ; \quad x_{2/4} = -3 \quad \text{doppelte Lösungen}$$

$$y) \quad -4x^2 + 6 + 3x^3 - x = 0 \quad \text{Gleichung sortieren!}$$

$$3x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0 \quad \text{Nicht durch den Faktor 3 dividieren.}$$

$$\text{Horner-Schema mit TR: } x_1 = -1$$

x^3	x^2	x^1	x^0	
3	-4	-1	6	
0	3	-7	6	0

$$3x^2 - 7x + 6 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 - 2}$$

$$x_{2/3} = \text{n.l.}$$

$$z) \quad x^4 - 2,8x^3 - 11,48x^2 + 2,4x = 0 \quad \text{Ausklammern von } x$$

$$x(x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4 = 0$$

$$\text{Horner-Schema mit TR: } x_2 = 5$$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-2,8	-11,48	2,4	
0	1	2,2	-0,48	0

$$x^2 + 2,2x - 0,48 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{3/4} = -1,1 \pm \sqrt{1,1^2 + 0,48}$$

$$x_3 = 0,2 \quad x_4 = -2,4$$