Lösungen 2019-8

1. Aufgabe

a) $f(0)=90$ oder $S_y\left(0|90\right)$ Es sind 90 Kaninchen entwichen.

b) Hier sind Hoch- und Tiefpunkt gesucht.

$f(x)=-2x^3+18x^2-30x+90$

$f'(x)=-6x^2+36x-30$

$f''(x)=-12x+36$

$f'(x_E)=0$

$0=-6x^2+36x-30 \mid :(-6)$

$0=x^2-6x+5$

mit p-q ergibt sich $x_{E1}=5$ und $x_{E2}=1$

$f'(x_E)=0 \wedge f''(x_E)\neq 0$

$f''(5)=-24<0 \Rightarrow H$ $f(5)=140$ $H(5|140)$

$f''(1)=24>0 \Rightarrow T$ $f(1)=76$ $T(1|76)$

Nach 5 Jahren war die Population am größten mit 140 Kaninchen, nach einem Jahr am kleinsten mit 76 Kaninchen.

c) $f(x)=130$

$130=-2x^3+18x^2-30x+90 \mid -130$

$0=-2x^3+18x^2-30x-40$

TR: $x_1=4$, $x_2\approx 5{,}85$ und $x_3\approx -0{,}85$ nicht mögl.

(Die Zahl -0,85 liegt vor dem Ausbruch, ist somit nicht im Definitionsbereich vorhanden und wird nicht weiter beachtet.)

Nach 4 und nach 5,85 Jahren (im sechsten Jahr) befanden sich 130 Kaninchen im Volk.

d) größte Wachstumsrate = Steigung im Wendepunkt

$f(x)=-2x^3+18x^2-30x+90$

$f'(x)=-6x^2+36x-30$

$f''(x)=-12x+36$

$f'''(x)=-12$

$f''(x_W)=0$

$0=-12x+36$

$x_W=3$

$f''(x_W)=0 \wedge f'''(x_W)\neq 0$

$f'''(3)=-12<0 \Rightarrow L-R-K$

$f(3)=108$ $W_{L-R}(3|108)$

$f'(x)=m$

$f'(3)=24$

Die größte positive Wachstumsrate gibt es nach 3 Jahren und beträgt 24 (Kaninchen pro Jahr). Zu diesem Zeitpunkt sind 108 Kaninchen vorhanden.

e) x gegeben, Steigung berechnen

$f'(x)=m$

$f'(1{,}5)=10{,}5$

Steigung gegeben, x-Werte berechnen

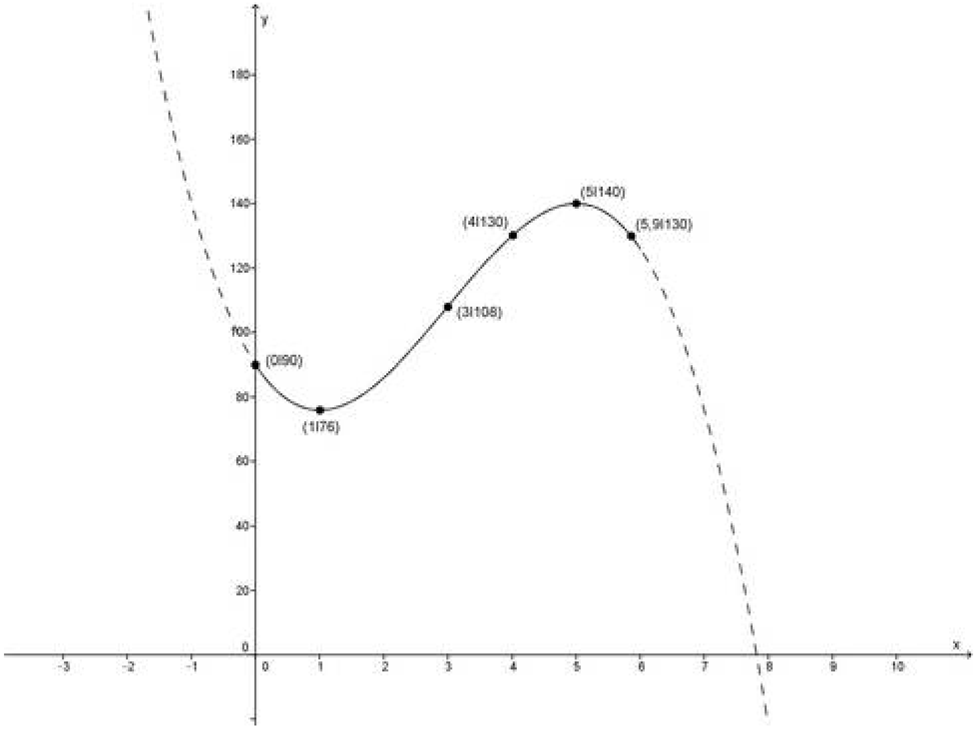
$f'(x)=m$

$10{,}5=-6x^2+36x-30$

Umformen und p-q-Formel ergibt: $x_1=4{,}5$ und $x_2=1{,}5$

Nach 1,5 Jahren beträgt die Wachstumsrate 10,5 Kaninchen pro Jahr. Diese liegt wieder nach 4,5 Jahren vor.

f)



Der durchgezogene Teil kann mithilfe der berechneten Werte gezeichnet werden. Der gestrichelte Teil ist der weitere Verlauf des Graphen, den man skizzieren soll.

<u>2. Aufgabe</u>

a) maximal = Hochpunkt

$f(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}8x + 3218$

$f'(x) = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8$

$f''(x) = -1{,}2x + 1{,}2$

$f'(x_E) = 0$

$0 = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8 \quad |: (-0{,}6)$

mit p-q ergibt sich $x_{E1} = 3$ und $x_{E2} = -1$

$0 = x^2 - 2x - 3$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(3) = -2{,}4 < 0 \Rightarrow H$

Max. gesucht: $f(3) = 3223{,}4$

$f''(-1) = 2{,}4 > 0 \Rightarrow T$

Am Ende von 2003 lag die maximale Bevölkerungsdichte mit 3223,4 vor.

b) $f(10) = 3096$ Im Jahr 2010 liegt die Bevölkerungsdichte bei 3096.

c) größte Änderungsrate im Wendepunkt

$f''(x) = -1{,}2x + 1{,}2$

$f'''(x) = -1{,}2$

$f''(x) = 0$

$0 = -1{,}2x + 1{,}2$

$x = 1$

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(1) = -1{,}2 < 0 \Rightarrow L - R - K$

Im Jahr 2001 stieg die Bevölkerungsdichte am stärksten.

d) $f(x)=3168{,}4$

$3168{,}4=-0{,}2x^3+0{,}6x^2+1{,}8x+3218$

$0=-0{,}2x^3+0{,}6x^2+1{,}8x+49{,}6$

$0=x^3-3x^2-9x-248$

Polynomdivision oder Horner-Schema mit $x_1=8$ ergibt: $x^2+5x+31$

p-q-Formel liefert: $x_{2/3}=\text{n.l.}$

Eine Bevölkerungsdichte von 3168,4 lag Ende des Jahres 2008 vor.

<u>3. Aufgabe</u>

a) $f(0)=38{,}4$

Zu Beginn der Behandlung hatte der Patient eine Temperatur von 38,4°C.

b) Zeitpunkt = x-Wert, Temperatur am höchsten = Hochpunkt

$f(x)=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+38{,}4$

$f'(x)=-0{,}4x^3+1{,}6x$

$f''(x)=-1{,}2x^2+1{,}6$

$f'(x_E)=0$

$0=-0{,}4x^3+1{,}6x$

TR: $x_{E1}=0$; $x_{E2}=2$; $x_{E3}=-2$ nicht möglich

$f'(x_E)=0\wedge f''(x_E)\neq 0$

$f''(0)=1{,}6>0\Rightarrow T$

$f''(2)=-3{,}2<0\Rightarrow H$

Nach 2 Tagen war die Temperatur am höchsten.

c) stärkster Anstieg im Wendepunkt

$f''(x_W)=0$

$0=-1{,}2x^2+1{,}6$

TR: $x_{W1}\approx 1{,}15$; $x_{W2}\approx -1{,}15$ nicht möglich

$f''(x_W)=0\wedge f'''(x_W)\neq 0$ mit $f'''(x)=-2{,}4x$

$f'''(1{,}15)=-2{,}76<0\Rightarrow L-R-K$

Nach 1,15 Tagen (im Laufe des zweiten Tages) stieg die Temperatur am stärksten an.

d) $f(x)=37{,}5$

$37{,}5=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+38{,}4\,|-37{,}5$

$0=-0{,}1x^4+0{,}8x^2+0{,}9\,|:(-0{,}1)$

$0=x^4-8x^2-9$

$x^2=z$

$0=z^2-8z-9$

$z_{1/2}=+4\pm\sqrt{16+9}$

$z_1=9$ und $z_2=-1$

$z=x^2$

$x^2=9\,|\sqrt{\ }$	$x^2=-1\,|\sqrt{\ }$
$x_1=3$ und $x_2=-3$ nicht mögl.	$x_{3/4}=\text{n.l.}$

Nach 3 Tagen hatte der Patient wieder eine Temperatur von 37,5°C.