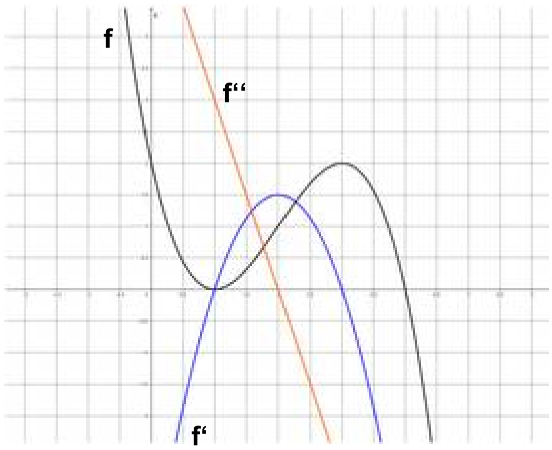
# Lösungen 2019-7

1. Aufgabe

a) $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$




b) $M_1 = (-\infty;1]$ monoton fallend
$M_2 = [1;3]$ monoton steigend
$M_3 = [3;+\infty)$ monoton fallend

c) Aus den Extremstellen des Ausgangsgraphen f werden Nullstellen der ersten Ableitung f'. Die Wendestelle von f gibt mit ihrer positiven Steigung an, dass im Ableitungsgraphen f' ein Hochpunkt vorliegt. Auf welcher Höhe (y-Wert) der Hochpunkt liegt, ist unbekannt. Somit könnte der Hochpunkt auch etwas weiter oben oder unten liegen. Auf jeden Fall aber oberhalb der x-Achse, da dieser Bereich positive Steigungen ausweist.
*In diesem Koordinatensystem sind die Graphen entsprechend der richtigen Ableitungsfunktionen eingezeichnet.*
Um den zweiten Ableitungsgraphen zu zeichnen, wird aus der Extremstelle von f' die Nullstelle von f''. Da die Parabel keinen Wendepunkt besitzt, muss man mit ihrem Steigungsverlauf arbeiten. Die Parabel besitzt links vom Hochpunkt positive und rechts davon negative Steigungen. Positive Steigungen liegen für den weiteren Ableitungsgraphen f'' oberhalb der x-Achse, negative unterhalb. Deshalb verläuft die Gerade von oben nach unten. Zeichnet man die Gerade flacher ein (geringere Steigung) ist das auch korrekt. Sie muss nur bei 2 die x-Achse schneiden.

d) $S_{x1/2}(1|0) \quad S_{x3}(4|0) \quad S_y(0|2)$

$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$f(x) = k(x-1)(x-1)(x-4)$

$f(x) = k(x^2 - 1x - 1x + 1)(x-4)$

$f(x) = k(x^2 - 2x + 1)(x-4)$

$f(x) = k(x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x + x - 4)$

$f(x) = k(x^3 - 6x^2 + 9x - 4)$ Gleichung ausmultipliziert, Streckungsfaktor k noch unbekannt

Punkt $S_y(0|2)$ einsetzen

$2 = k(0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 4)$

$2 = k \cdot (-4) \,|\!: (-4)$

$-0{,}5 = k$ einsetzen in die Gleichung

$f(x) = -0{,}5(x^3 - 6x^2 + 9x - 4)$

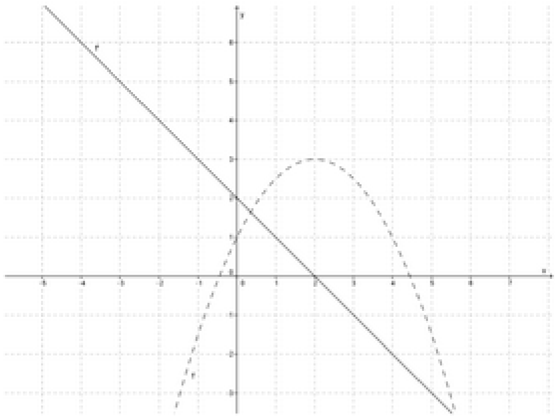
$f(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 2$

e) $f'(x) = -1{,}5x^2 + 6x - 4{,}5$
$f''(x) = -3x + 6$

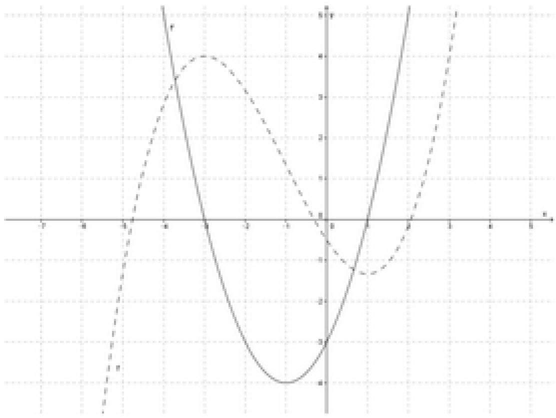
f) Mithilfe der Ableitungen kann man den Verlauf der eingezeichneten Graphen überprüfen. *(siehe Aufgabe c))*

2. Aufgabe

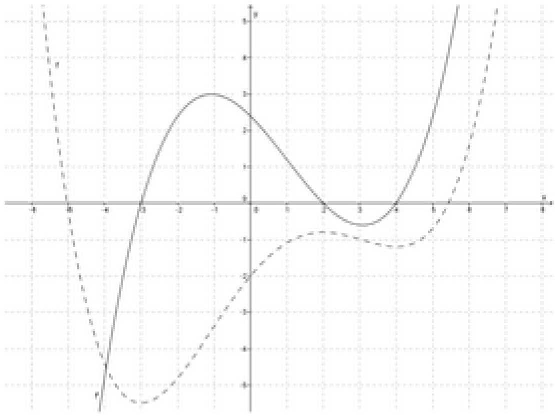
Material 2



Material 3



Material 4

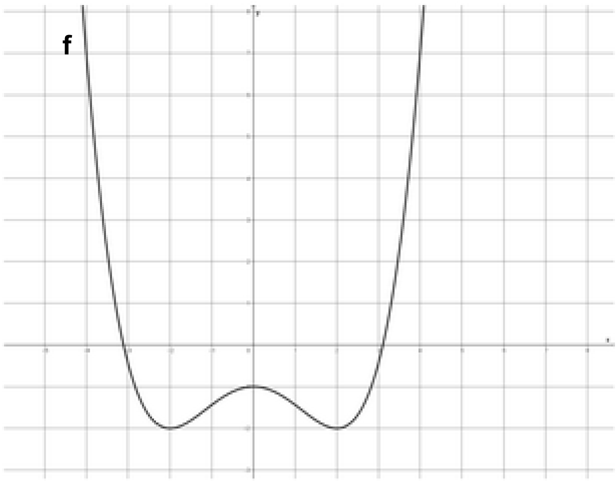


*(Der Hochpunkt kann auch weiter oben liegen.)*

3. Aufgabe

a) $T_2(-2|-2)$ und $H(0|-1)$

b) Zeichnung in Material 5 =>




c) Der Graph kommt von oben und geht nach oben.

d) $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

e) wegen Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Einsetzen von Streckungsfaktor und y-Achsenabschnitt ergibt:

$f(x) = \frac{1}{16}x^4 + bx^2 - 1$

Einsetzen des Tiefpunktes $T(2|-2)$ ergibt:

$-2 = \frac{1}{16} \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 - 1$

$-2 = 1 + b \cdot 4 - 1$

$-2 = 4b \,|: 4$

$-\frac{1}{2} = b$

$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$

f) $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2-1$

$f(x_N)=0$

$0=\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^2-1 \,\Big|\, :\frac{1}{16}$

$0=x^4-8x^2-16$

$x^2=z$

$0=z^2-8z-16$

$z_{1/2}=4\pm\sqrt{4^2+16}$

$z_1\approx 9{,}66$

$z_2\approx -1{,}66$

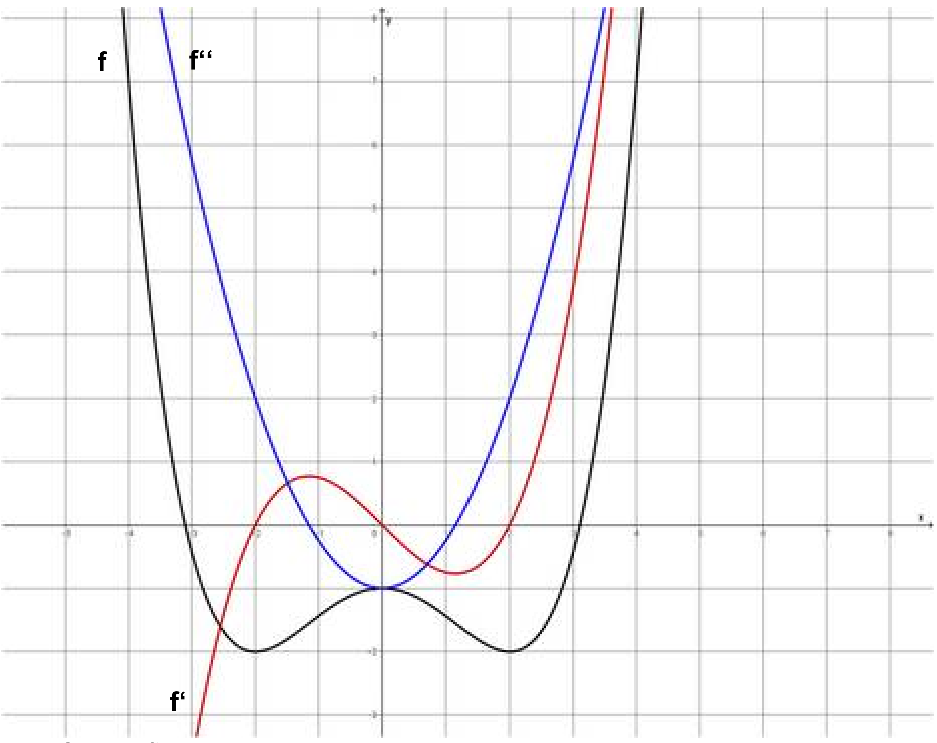
$z=x^2$

$x^2=9{,}66 \,\big|\sqrt{\;}\quad x_{N1}\approx 3{,}11 \quad x_{N2}\approx -3{,}11$

$x^2=-1{,}66 \,\big|\sqrt{\;}\quad x_{3/4}=\text{n.l.}$

Nullstellen sind die x-Werte.

g)




Der Graph f‘ kommt von unten und geht nach oben.
Der Graph f“ kommt von oben und geht nach oben.

h) $f'(x)=\frac{1}{4}x^3-x$ Punktsymmetrie zum Ursprung

$f''(x)=\frac{3}{4}x^2-1$ Achsensymmetrie zur y-Achse

Ist eine Ausgangsfunktion symmetrisch, wechselt jede Ableitung die Art der Symmetrie.
Beim zeichnerischen Ableiten entstehen ebenfalls die festgestellten Symmetrien.

4. Aufgabe

a) $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4x + 2{,}5$

$f'(x) = -1{,}5x^2 + 6x - 4$

$f''(x) = -3x + 6$

$f'(x_E) = 0$

$0 = -1{,}5x^2 + 6x - 4 \,|\, :(-1{,}5)$

$0 = x^2 - 4x + \frac{8}{3}$

$x_{E1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{8}{3}}$

$x_{E1} \approx 3{,}15$

$x_{E2} \approx 0{,}86$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

$f''(3{,}15) = -3{,}45 < 0 \Rightarrow H$

$f''(0{,}86) = 3{,}42 > 0 \Rightarrow T$

$f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$

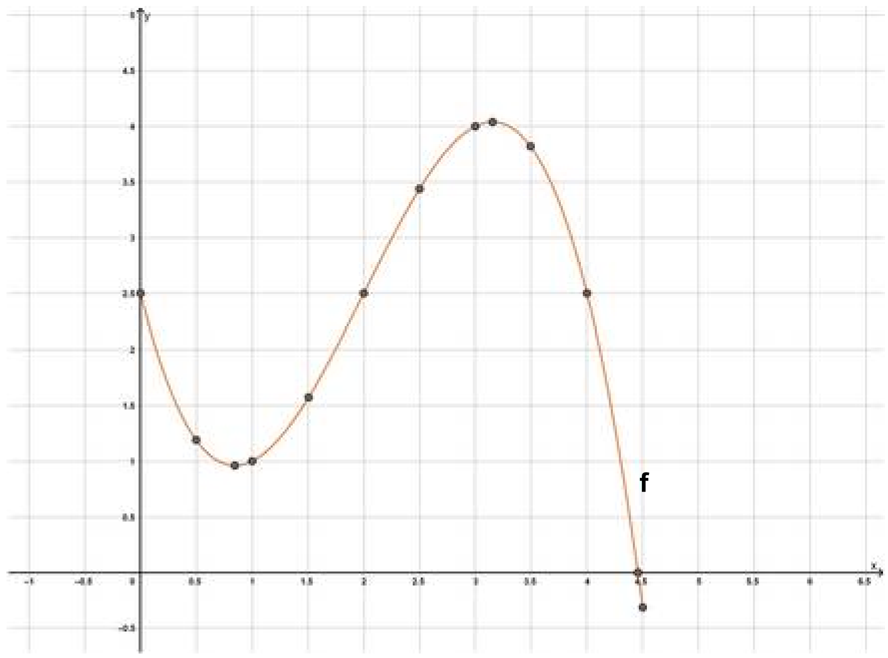
$f''(3{,}15) = -3{,}45 < 0 \Rightarrow H$

$f''(0{,}86) = 3{,}42 > 0 \Rightarrow T$

$f(3{,}15) \approx 4{,}04$ $\quad H(3{,}15|4{,}04)$

$f(0{,}86) \approx 0{,}96$ $\quad T(0{,}86|0{,}96)$

b)




c) $t(x) = m \cdot x + b$ mit $x = 1$

$f(1) = 1$ y-Wert

$f'(1) = 0{,}5$ Steigung m

$1 = 0{,}5 \cdot 1 + b \,|\, -0{,}5$

$b = 0{,}5$

$t(x) = 0{,}5x + 0{,}5$

$n(x) = m \cdot x + b$ mit $P(1|1)$

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 0{,}5 = +\frac{1}{2}$

$m_2 = -\frac{2}{1} = -2$ (negativer Kehrwert)

$1 = -2 \cdot 1 + b \,|\, +2$

$b = 3$

$n(x) = -2x + 3$

Der Steigungswinkel der Funktion f entspricht dem Steigungswinkel der Tangenten.

Man benutzt $\tan(\alpha) = m$ bzw. hier $\tan^{-1}(m) = \alpha$, da man den Winkel sucht.

$\tan^{-1}(0{,}5) = \alpha$

$\alpha \approx 26{,}57°$

d) $f'(x) = m$ mit $m = 2$

$2 = -1{,}5x^2 + 6x - 4 \,|\, -2$

$0 = -1{,}5x^2 + 6x - 6 \,|\, :(-1{,}5)$

$0 = x^2 - 4x + 4$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$

$x_{1/2} = 2$

Die Steigung $m = 2$ kommt nur einmal im Graphen von f vor. Da es eine doppelte Lösung ist, handelt es sich um die Wendestelle des Graphen f.

*Die Tangente im Wendepunkt schneidet den Graphen von f berührend, weil beide die gleiche Steigung besitzen.*

e) $t(x) = m \cdot x + b$ mit $x = 4$

$f(4) = 2{,}5$ y-Wert

$f'(4) = -4$ Steigung m

$2{,}5 = -4 \cdot 4 + b \,|\, +16$

$b = 18{,}5$

$t(x) = -4x + 18{,}5$