Lösungen 2019-6

Aufgabe 1

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5$

a) $x \to -\infty; f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty; f(x) \to +\infty$

Es liegt keine Symmetrie vor, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden sind.

$S_y(0|4{,}5)$

b) $f(x_N) = 0$

$0 = 0{,}5x^3 - 3x + 4{,}5$

TR: $x_{N1} = -3$

$x_{N2/N3} = \text{n.l.}$

$S_{x1}(-3|0)$

c) Die Funktion f entspricht Graph 2.

d) Der Graph von f kommt von unten und geht nach oben. Der Graph 1 hat aber einen anderen Verlauf, er kommt von oben und geht nach unten.
Der Graph 3 besitzt 3 Nullstellen, der Graph von f hat aber nur eine Nullstelle.

e) $M_1 =]-\infty;-2]$ monoton fallend

$M_2 = [-2;+2]$ monoton steigend

$M_3 = [+2;+\infty[$ monoton fallend

f) $S_{x1}(-3|0) \quad S_{x2}(1|0) \quad S_{x3}(3|0) \quad S_y(0|4{,}5)$

$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$g(x) = k(x + 3)(x - 1)(x - 3)$

$g(x) = k(x^2 - 1x + 3x - 3)(x - 3)$

$g(x) = k(x^2 + 2x - 3)(x - 3)$

$g(x) = k(x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x - 3x + 9)$

$g(x) = k(x^3 - x^2 - 9x + 9)$

Punkt $S_y(0|4{,}5)$ einsetzen

$4{,}5 = k(0^3 - 0^2 - 9 \cdot 0 + 9)$

$4{,}5 = k \cdot 9 \,|: 9$

$k = 0{,}5$

$g(x) = 0{,}5(x^3 - x^2 - 9x + 9)$

$g(x) = 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 4{,}5$

Aufgabe 2

Graph A ist der richtige Ableitungsgraph, da er dort Nullstellen hat, wo der Graph f Extremstellen besitzt. Der Wendepunkt hat eine negative Steigung, was im Ableitungsgraphen zu einem Tiefpunkt führt.

Graph B ist ein falscher Ableitungsgraph obwohl er einen Tiefpunkt aufweist, da er seine Nullstellen nicht dort besitzt, wo der Graph f Extremstellen hat.

Graph C ist ein falscher Ableitungsgraph obwohl er dort Nullstellen besitzt, wo der Graph f Extremstellen hat, aber er weist einen Hochpunkt auf (Wendepunkt mit positiver Steigung).

Aufgabe 3

$g(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2$

a) Die Funktion g(x) ist 4. Grades, achsensymmetrisch zur y-Achse, kommt von oben und geht nach oben und schneidet (berührt) die y-Achse im Ursprung.
Zu dieser Beschreibung passen nur der grüne und der schwarze Graph.
Der lila Graph hat einen anderen Verlauf (kommt von unten und geht nach unten).
Der rosa Graph hat zwar den richtigen Verlauf, aber er schneidet die y-Achse nicht im Ursprung sondern bei $S_y\left(0|2\right)$.

b) Da der grüne und der schwarze Graph unterschiedliche Nullstellen besitzen, kann man zur Unterscheidung von g(x) die Nullstellen bestimmen.

$g(x_N) = 0$

$0 = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 \,|\, : 0{,}25$

$0 = x^4 - 6x^2$

$0 = x^2\left(x^2 - 6\right)$

$x_{N1/N2} = 0 \qquad 0 = x^2 - 6$ => $x_{N3} \approx 2{,}45 \qquad x_{N4} \approx -2{,}45$

Diese Nullstellen weist nur der grüne Graph auf, somit ist er der Graph von g(x).

c) $g'(x) = x^3 - 3x$

$g''(x) = 3x^2 - 3$

d) $g'(x) = x^3 - 3x$ ist der violette Graph (Verlauf).

$g''(x) = 3x^2 - 3$ ist der grüne Graph (y-Achsenabschnitt).

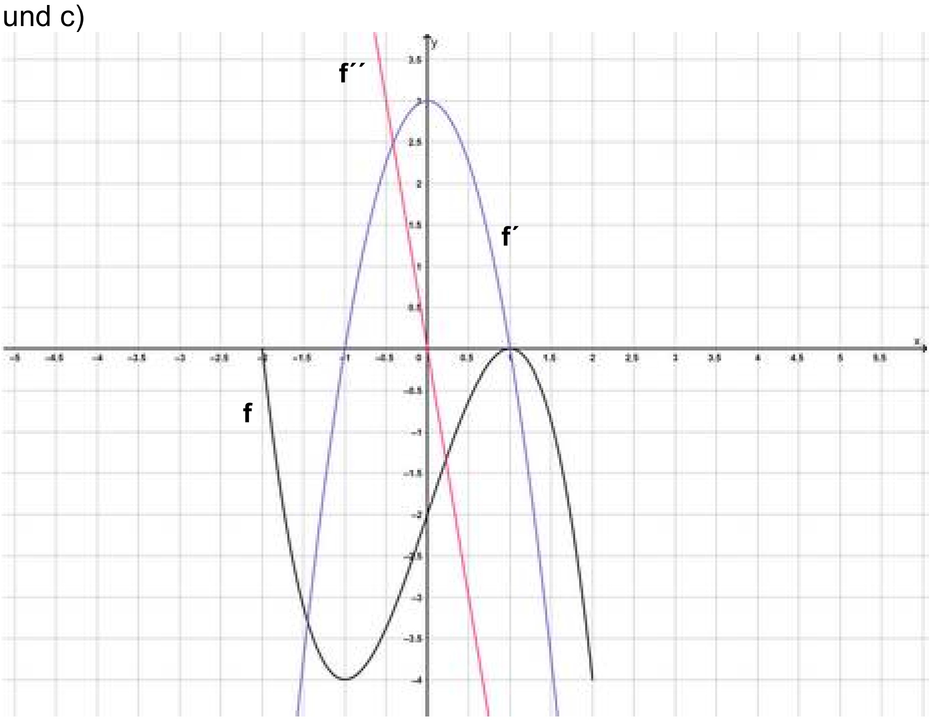
Aufgabe 4

a)

$a < 0$	$a > 0$
$x \to -\infty; f_a(x) \to -\infty$	$x \to -\infty; f_a(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f_a(x) \to +\infty$	$x \to +\infty; f_a(x) \to -\infty$

Der Globalverlauf ist abhängig von a.
Die Symmetrie ist auch abhängig von a, weil für $a = -0{,}5$ die Konstante null wird und somit wegen nur ungeraden Exponenten Punktsymmetrie zum Ursprung vorliegt.
Bei allen anderen Werten für a liegt keine Symmetrie vor, da dann sowohl ungerade als auch gerade Exponenten in der Funktionsgleichung vorkommen.

b) und c)



d) $f_a(x) = -\frac{2}{3}ax^3 + 2ax - (a+0{,}5)$

$f_a'(x) = -2ax^2 + 2a$

$f_a''(x) = -4ax$

$f_a'(x_E) = 0$

$0 = -2ax^2 + 2a \,|: (-2a)$

$0 = x^2 - 1 \,| +1$

$1 = x^2 \,| \sqrt{}$

$x_{E1} = 1$; $x_{E2} = -1$

Die Extremstellen sind unabhängig von a.

$f_a'(x_E) = 0 \wedge f_a''(x_E) \neq 0$

$f_a''(1) = -4a \cdot 1 = -4a$ für $a > 0$ ergibt sich $f_a''(1) < 0 \Rightarrow H$

für $a < 0$ ergibt sich $f_a''(1) > 0 \Rightarrow T$

$f_a''(-1) = -4a \cdot (-1) = +4a$ für $a > 0$ ergibt sich $f_a''(-1) > 0 \Rightarrow T$

für $a < 0$ ergibt sich $f_a''(-1) < 0 \Rightarrow H$

Die Art der Extrempunkte bzw. die Lage der Extrempunkte ist abhängig von a.

e) $f_a(x) = -\frac{2}{3}ax^3 + 2ax - (a+0{,}5)$ für $a = 0$ ergibt sich $f_0(x) = -0{,}5$

Es entsteht eine waagrechte Gerade.