Lösungen 2019-5

Berechnen heißt, alle Rechenschritte ersichtlich darzustellen!
Hier wird aus Platzgründen manchmal ein gekürzter Rechenweg dargestellt.

Aufgabe 1

1.1 $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$

$S_y(0|-1)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x - 1 \,\Big|\, :\left(-\frac{1}{8}\right)$

$0 = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

TR: $x_1 = -2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 1$

Polynomdivision oder Horner Schema mit $x_{N1} = 1$

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-3	-6	8	
0	1	-2	-8	0

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{N2/3} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 8}$ oder $x_{N2/3} = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$x_{N2} = 4$ und $x_{N3} = -2$

$S_{x1}(1|0)$ $S_{x2}(4|0)$ $S_{x3}(-2|0)$

1.2 **Ableitungen**

$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

1. Schritt $f'(x_E) = 0$

$0 = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \,\Big|\, :\left(-\frac{3}{8}\right)$ pq-Formel liefert $x_{E1} \approx 2{,}73$ und $x_{E2} \approx -0{,}73$

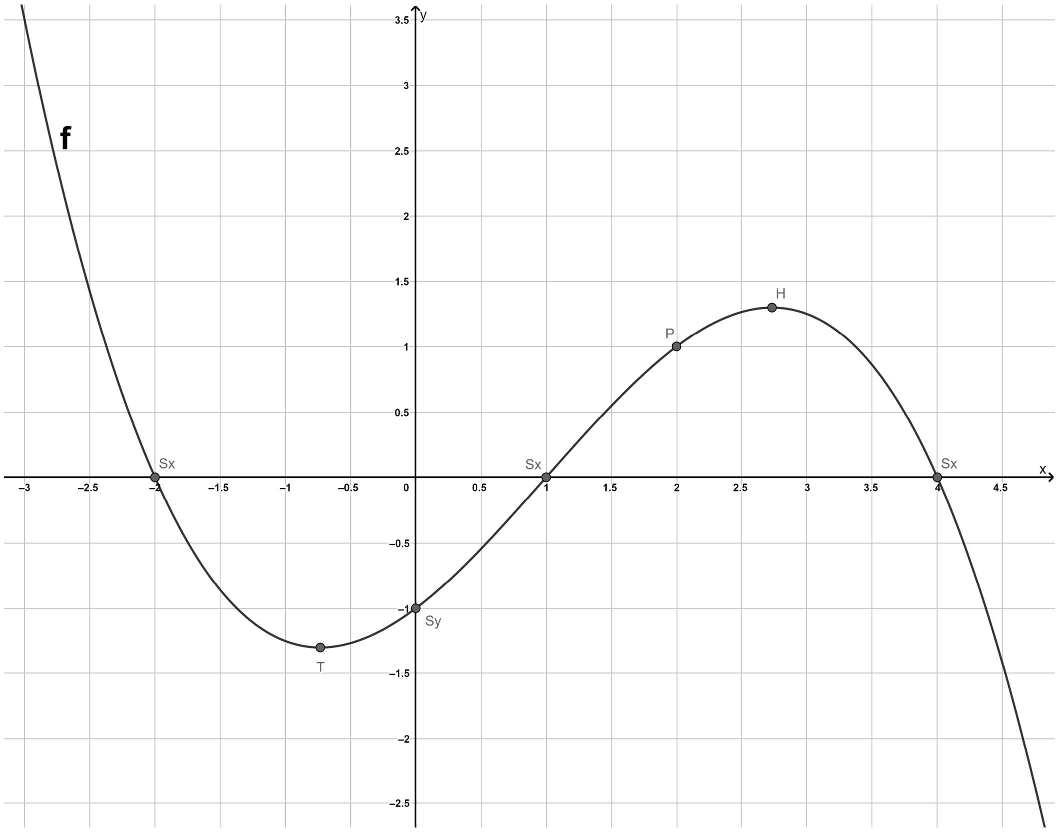
2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ 3. Schritt

$f''(2{,}73) \approx -1{,}30 < 0 \Rightarrow H$ $f(2{,}73) \approx 1{,}30$ $H(2{,}73|1{,}30)$

$f''(-0{,}73) \approx 1{,}30 > 0 \Rightarrow T$ $f(-0{,}73) \approx -1{,}30$ $T(-0{,}73|1{,}30)$

1.3 $f(2) = 1$ $P(2|1)$ Einsetzen des x-Wertes in die Ausgangsfunktion!

1.4



1.5 $f'(x) = m$

$f'(0) = \frac{3}{4} \quad m_1 = \frac{3}{4}$

$f'(2) = \frac{3}{4} \quad m_2 = \frac{3}{4}$

1.6 $t(x) = m \cdot x + b$

$x_1 = 0 \qquad m_1 = \frac{3}{4} \qquad f(0) = -1$ y-Wert

alle Werte einsetzen

$-1 = \frac{3}{4} \cdot 0 + b \qquad t(x_1) = \frac{3}{4}x - 1$

$b = -1$

$t(x) = m \cdot x + b$

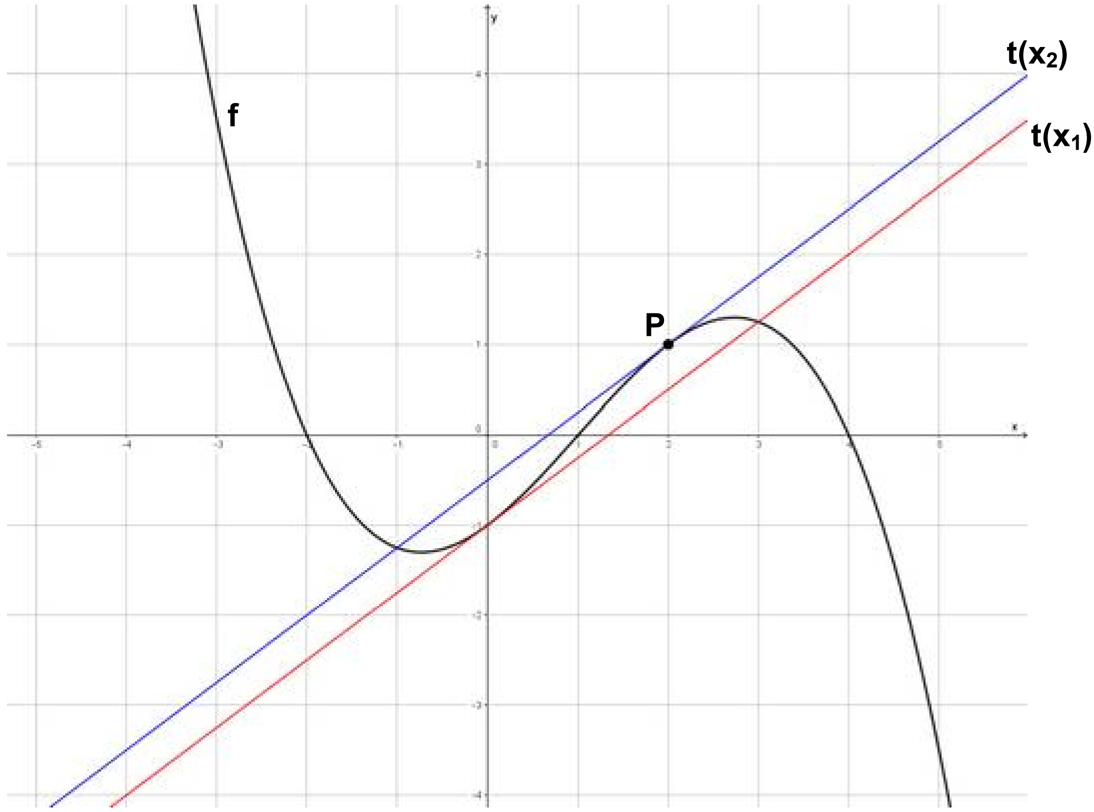
$x_2 = 2 \qquad m_1 = \frac{3}{4} \qquad f(2) = 1$ y-Wert

alle Werte einsetzen

$1 = \frac{3}{4} \cdot 2 + b \qquad t(x_2) = \frac{3}{4}x - 0{,}5$

$b = -0{,}5$

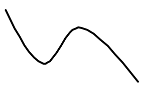
1.7



Aufgabe 2

2.1 $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

1 Globalverlauf $x \to -\infty; f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty; f(x) \to -\infty$



2 Der Graph besitzt Punktsymmetrie zum Ursprung, da nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

3 Schnittpunkte mit den Achsen

$S_y(0|0)$

$f(x_N) = 0$

$0 = -\frac{1}{4}x^3 + 3x \;\Big|\; : \left(-\frac{1}{4}\right)$ (Normalisieren nur, wenn = 0 steht!!!)

$0 = x^3 - 12x$

$0 = x(x^2 - 12)$

$x_{N1} = 0 \qquad x^2 - 12 = 0$

$x_{N2} \approx 3{,}46 \qquad x_{N3} \approx -3{,}46$

$S_{x1}(0|0) \quad S_{x2}(3{,}46|0) \quad S_{x3}(-3{,}46|0)$

Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$
$$f''(x) = -\frac{3}{2}x$$
$$f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

4 Extrempunkte und Monotonie

1\. Schritt $f'(x_E) = 0$ | 2. Schritt $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ | 3. Schritt

$0 = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \;\Big|\; : \left(-\frac{3}{4}\right)$

$0 = x^2 - 4$

$x_{E1} = 2$

$x_{E2} = -2$

$f''(2) = -3 < 0 \Rightarrow H$ $\quad f(2) = 4 \quad H(2|4)$

$f''(-2) = 3 > 0 \Rightarrow T$ $\quad f(-2) = -4 \quad T(-2|-4)$

$M_1 = (-\infty; -2]$ monoton fallend

$M_2 = [-2; +2]$ monoton steigend

$M_3 = [2; +\infty)$ monoton fallend

5 Wendepunkte:

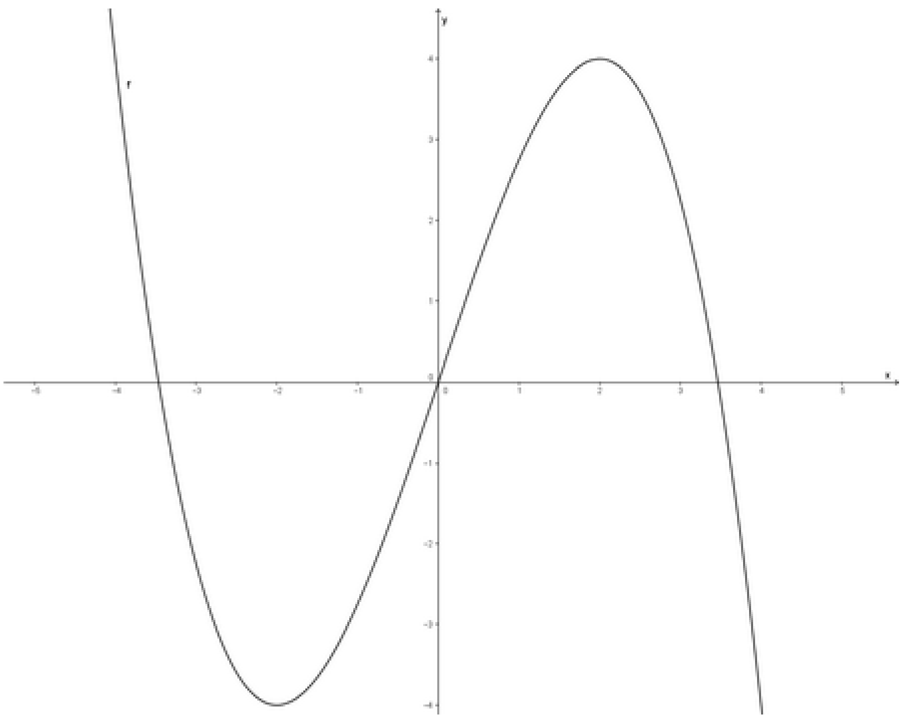
1\. Schritt $f''(x_W) = 0$ | 2. Schritt $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$ | 3. Schritt

$0 = -\frac{3}{2}x$

$0 = x_W$

$f'''(0) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow L - R - K$ $\quad f(0) = 0 \quad W_{L-R}(0|0)$

6 Zeichnung



2.2 Eingabe von f(x) und $x_1 = -4$ in TR (SHIFT $\int_{\square}^{\square} \square$) ergibt $m_1 = -9$ alternativ: $f'(-4) = -9$

2.3 Eingabe von f(x) und $x_2 = +1$ in TR (SHIFT $\int_{\square}^{\square} \square$) ergibt $m_2 = 2{,}25$ alternativ: $f'(1) = 2{,}25$

2.4 $f'(x)=m \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$ mit $m=-3{,}75$ ergibt sich

$-3{,}75=-\frac{3}{4}x^2+3 \,|-3$

$-6{,}75=-\frac{3}{4}x^2 \quad |:\left(-\frac{3}{4}\right)$ *Stellen = x-Werte* !!!

$9=x^2 \quad |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_1=3 \quad x_2=-3$

2.5 $f'(x)=m \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$ mit $m=3$ ergibt sich

$3=-\frac{3}{4}x^2+3 \,|-3$

$0=-\frac{3}{4}x^2 \quad |:\left(-\frac{3}{4}\right)$

$0=x^2 \quad |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_{1/2}=0$

2.6 $t(x)=m\cdot x+b$ => y-Wert zu x = 0 in der Ausgangsfunktion berechnen
$f(0)=0$ mit m = 3 ergibt sich durch Einsetzen

$0=3\cdot 0+b$
$b=0$ => $t(x)=3x$

2.7 senkrecht = orthogonal => $m_1\cdot m_2=-1$

$m_1=3$ => $m_2=-\frac{1}{3}$ Da die Tangente im Ursprung anliegt, bleibt b = 0.

$n(x)=-\frac{1}{3}x$ Gleichung der Normalen

2.8 Steigungswinkel werden mit $\tan(\alpha)=m$ berechnet.
$\alpha=-83{,}65°$ => $\tan(-83{,}65)\approx -9$ also $m=-9$

$f'(x)=m \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$ mit $m=-9$ ergibt sich

$-9=-\frac{3}{4}x^2+3 \,|-3$

$-12=-\frac{3}{4}x^2 \quad |:\left(-\frac{3}{4}\right)$

$16=x^2 \quad |\sqrt{\ }$ daraus ergibt sich $x_1=4 \quad x_2=-4$

<u>3. Aufgabe</u>

3.1 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2$

$f'(x)=m \quad f'(x)=2x^2+4x$ mit $m=6$ ergibt sich

$6=2x^2+4x \,|-6$

$0=2x^2+4x-6 \,|:(2)$

$0=x^2+2x-3$ p-q

$x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+3}$

$x_1=1 \quad x_2=-3$

$x_1 = 1$

$f(1) = \frac{8}{3}$

$t(x) = m \cdot x + b$

$\frac{8}{3} = 6 \cdot 1 + b$

$b = -\frac{10}{3}$

=> $t(x_1) = 6x - \frac{10}{3}$

$x_2 = -3$

$f(-3) = 0$

$t(x) = m \cdot x + b$

$0 = 6 \cdot (-3) + b$

$b = 18$

=> $t(x_2) = 6x + 18$

3.2 $t(x_1) = f(x)$

$6x - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \left| -6x + \frac{10}{3} \right.$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + \frac{10}{3}$

TR: $x_1 = 1$

$x_2 = -5$

Der Wert $x = 1$ ist die Berührstelle der Tangente, also eine doppelte Lösung.
Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(-5) = -33\frac{1}{3}$ (und zur Überprüfung $t(-5) = -33\frac{1}{3}$) => $S_3(-5|-33{,}33)$

$t(x_2) = f(x)$

$6x + 18 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \quad \left| -6x - 18 \right.$

$0 = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x - 18$

TR: $x_1 = -3$

$x_2 = 3$

Der Wert $x = -3$ ist die Berührstelle der Tangente, also eine doppelte Lösung.
Da nach dem weiteren Schnittpunkt gefragt ist, muss man die einfache Lösung benutzten.

$f(3) = 36$ => $S_3(3|36)$ Die Überprüfung in t(x) sollte selbstverständlich sein.

4. Aufgabe

4.1

1. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist für jeden x-Wert der **y-Wert 4**. Man erhält den vollständigen Punkt (2I4). Durch Einsetzten in $f_a(x)$ erhält man a.

2. Möglichkeit

$t(x) = 4$ ist eine waagrechte Tangente, also ist die **Steigung** $m = 0$. Bildet man die erste Ableitung und setzt x-Wert und Steigung ein, erhält man a.

$f_a(x) = ax^3 + 3x$	$f_a'(x) = 3ax^2 + 3$
$4 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2$	$0 = 3a \cdot 2^2 + 3$
$4 = 8a + 6$	$0 = 12a + 3$
$-2 = 8a$	$-3 = 12a$
$-0{,}25 = a$	$-0{,}25 = a$

Da für den Parameter a ein Wert berechnet wurde, der kleiner als null ist, ist die Einschränkung für a mit $a < 0$ erfüllt.
Die Funktionsgleichung lautet in beiden Fällen: $f_{-0,25}(x) = -0{,}25x^3 + 3x$.

4.2 Für alle Funktionsgleichungen der Schar gilt, dass der Term mit dem linearen Teil +3x endet. Dies bedeutet, dass alle Graphen dieser Schar eine gemeinsame Nullstelle bei $S(0|0)$, also im Ursprung, besitzen.

4.3 Steigungen werden in der ersten Ableitung berechnet. $f_a'(x) = 3ax^2 + 3$
Setzt man von $S(0|0)$ den x-Wert, also die null, in die erste Ableitung ein, um die Steigung zu berechnen, so erhält man $f_a'(0) = 3a \cdot 0^2 + 3 = 3$.
Somit ist die Steigung im Ursprung unabhängig von dem Parameter a und besitzt bei dieser Funktionenschar immer den Wert 3.
Der Punkt S ist ein Berührpunkt (doppelter Schnittpunkt) aller Funktionen dieser Schar, da alle Funktionen dort die gleiche Steigung besitzen.
SCHLUSSFOLGERUNG:
Besitzen zwei Funktionen, die nicht einer gemeinsamen Schar angehören, die gleiche Steigung in einem gemeinsamen Punkt, dann ist das ein <u>Berühr</u>punkt und <u>kein Schnitt</u>punkt der beiden Funktionen. (siehe Tangenten)