

Lösungen Gleichungen 2019

1. Aufgabe

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Horner-Schema mit z.B. $x_1 = -1$ (TR)

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 & \\ 1 & -4 & 1 & 6 & \\ 0 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{2/3} = +2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 2$$

Rechnungen im Kopf

$$0 \cdot (-1) + 1 = 1$$

$$1 \cdot (-1) - 4 = -5$$

$$-5 \cdot (-1) + 1 = 6$$

$$6 \cdot (-1) + 6 = 0$$

p-q-Formel

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

biquadratische Gleichung, Substitution

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 29z + 100 = 0$$

p-q-Formel

$$z_{1/2} = +14,5 \pm \sqrt{14,5^2 - 100}$$

$$z_1 = 25$$

$$z_2 = 4$$

Resubstitution mit

$$z = x^2$$

$$x^2 = 25 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = -5$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_3 = 2 \quad ; \quad x_4 = -2$$

c) $(x - 4)(x + 3) = (x + 5)^2 - 4$ Ausmultiplizieren der Klammern, binomische Formel

$$x^2 + 3x - 4x - 12 = x^2 + 10x + 25 - 4$$

$$x^2 - x - 12 = x^2 + 10x + 21 \quad | -x^2$$

$$-x - 12 = 10x + 21 \quad | -10x + 12$$

$$-11x = 33 \quad | :(-11)$$

$$x = -3$$

d) $x^3 - 5x^2 + 3x = 0$

Ausklammern von x

$$x \cdot (x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{2/3} = +2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 3}$$

$$x_2 \approx 4,30$$

$$x_3 \approx 0,70$$

ACHTUNG: Rundungszeichen verwenden!

Auf zwei Kommastellen runden!

e) $x^3 + 6x^2 = 0$

Ausklammern von x^2

$$x^2 \cdot (x + 6) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad} \quad ; \quad x + 6 = 0 \quad | -6$$

$$x_{1/2} = 0 \quad ; \quad x_3 = -6$$

f) $x^4 - 625 = 0 \quad | + 625$

$$x^4 = 625 \quad | \sqrt[4]{}$$

$$x_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = -5$$

g) $0,4x^3 + 1,2x^2 - 5,2x - 6 = 0$

Man kann das Horner-Schema auch mit dem Koeffizienten vor der höchsten Potenz durchführen. TR: $x_1 = -1$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$0,4 \quad 1,2 \quad -5,2 \quad -6$$

$$0 \quad 0,4 \quad 0,8 \quad -6 \quad 0$$

$$0,4x^2 + 0,8x - 6 = 0 \quad | : 0,4 \quad \text{Man muss dann vor der p-q-Formel dividieren.}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 15}$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -5$$

h) $-5x^2 + 20x = 0 \quad | : (-5)$

$$x^2 - 4x = 0$$

Ausklammern von x

$$x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 4$$

i) $-\frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + 1,5 = 0 \quad | : (-\frac{1}{4})$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{TR: } x_1 = 1$$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$1 \quad 4 \quad 1 \quad -6$$

$$0 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_{2/3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 6}$$

$$x_2 = -2 \quad ; \quad x_3 = -3$$

j) $-0,5x^4 + 5x^2 - 4,5 = 0 \quad | : (-0,5)$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Substitution

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

p-q-Formel

$$z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 9}$$

$$z_1 = 9$$

$$z_2 = 1$$

$$z = x^2$$

Resubstitution

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{}$$

$$x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = -1$$

$$k) \quad \frac{1}{5}x^3 - x - 20 = 0 \quad | : \frac{1}{5}$$

$$x^3 - 5x - 100 = 0$$

$$\text{TR: } x_1 = 5$$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$1 \quad 4 \quad 1 \quad -6$$

$$0 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \quad 0$$

$$x^2 + 5x + 20 = 0$$

$$x_{2/3} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 20}$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

$$l) \quad -x^2 + 81 = 0$$

$$x^2 = 81 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 9 ; \quad x_2 = -9$$

$$m) \quad 0,5x^4 - 8x^2 = 0$$

$$x^4 - 16x^2 = 0 \quad \text{Ausklammern von } x^2$$

$$x^2(x^2 - 16) = 0$$

$$x_{1/2} = 0 ; \quad x^2 - 16 = 0$$

$$x_3 = 4 ; \quad x_4 = -4$$

$$n) \quad -3(x-1) = -4(-2-x) + 2 \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$-3x + 3 = 8 + 4x + 2$$

$$-3x + 3 = 4x + 10 \quad | +3x - 10$$

$$-7 = 7x \quad | :7$$

$$x = -1$$

$$o) \quad \frac{5}{6}x + 15 = 0 \quad | -15$$

$$\frac{5}{6}x = -15 \quad | : \frac{5}{6}$$

$$x = -18$$

$$p) \quad 3x^3 - 8,5x^2 - 4,5 = 0 \quad \text{Nicht durch Faktor 3 dividieren, da Brüche entstehen}$$

$$\text{TR: } x_1 = 3$$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$3 \quad -8,5 \quad 0 \quad -4,5$$

$$0 \quad 3 \quad 0,5 \quad 1,5 \quad 0$$

$$3x^2 + 0,5x + 1,5 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 - 0,5}$$

$$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$$

q) $-0,5x^2 - 4,5x - 4 = 0 \quad | :(-0,5)$

$x^2 + 9x + 8 = 0$ p-q-Formel

$x_{1/2} = -4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 8}$

$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = -8$

r) $\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$ Nicht durch Faktor dividieren, da neue Brüche entstehen!

TR: $x_1 = 1$

$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$

$3/4 \quad -1/4 \quad 3/2 \quad -2$

$0 \quad 3/4 \quad 1/2 \quad 2 \quad 0$

$\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad | : \frac{3}{4}$

$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = 0$

$x_{2/3} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}}$

$x_{2/3} = \text{nicht lösbar}$

s) $4x^4 - 6x^3 = 0$

$x^3(4x - 6) = 0$ Ausklammern von x^3

$x^3 = 0 \quad | \sqrt[3]{\quad} \quad ; \quad 4x - 6 = 0$

$x_{1/2/3} = 0 \quad ; \quad x_4 = 1,5$

t) $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7x = 0 \quad | : \frac{1}{2}$

$x^3 - 0,5x^2 - 14x = 0$ Ausklammern von x

$x(x^2 - 0,5x - 14) = 0$

$x_1 = 0 \quad ; \quad x^2 - 0,5x - 14 = 0$ p-q-Formel

$x_{2/3} = 0,25 \pm \sqrt{0,25^2 + 14}$

$x_2 = 4$

$x_3 = -3,5$

u) $-3x^4 + 21x^2 - 36 = 0 \quad | :(-3)$

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ Substitution

$x^2 = z$

$z^2 - 7z + 12 = 0$ p-q-Formel

$z_{1/2} = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 12}$

$z_1 = 4$

$z_2 = 3$

$z = x^2$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = -2$

$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\quad} \quad x_3 \approx 1,73 \quad ; \quad x_4 \approx -1,73$

v) $0,1x^3 - 0,2x^2 - 0,4x + 0,8 = 0 \mid : 0,1$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

TR: $x_1 = 2$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$1 \quad -2 \quad -4 \quad 8$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \quad 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$x^2 = 4 \mid \sqrt{}$$

$$x_2 = 2 \text{ doppelte Lösung}$$

$$x_3 = -2$$

w) $-\frac{1}{5}x^4 + 2x^3 - 5x^2 = 0 \mid \left(-\frac{1}{5}\right)$

$$x^4 - 10x^3 + 25x^2 = 0$$

Ausklammern von x^2

$$x^2(x^2 - 10x + 25) = 0$$

$$x_{1/2} = 0 \quad ; \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$x_{3/4} = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$$

$$x_{3/4} = 5$$

x) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$ Substitution

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 18z + 81 = 0 \quad \text{p-q-Formel}$$

$$z_{1/2} = 9 \pm \sqrt{81 - 81}$$

$$z_1 = 9$$

beide Lösungen schreiben, da jedes z zurückgetauscht wird

$$z_2 = 9$$

und jedes Mal die Wurzel gezogen werden muss

$$z = x^2$$

$$x^2 = 9 \mid \sqrt{}$$

$$x^2 = 9 \mid \sqrt{}$$

$$x_{1/3} = 3 \quad ; \quad x_{2/4} = -3 \quad \text{doppelte Lösungen}$$

y) $-4x^2 + 6 + 3x^3 - x = 0$ Gleichung sortieren!

$$3x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$$

Nicht durch den Faktor 3 dividieren.

TR: $x_1 = -1$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$3 \quad -4 \quad -1 \quad 6$$

$$0 \quad 3 \quad -7 \quad 6 \quad 0$$

$$3x^2 - 7x + 6 = 0 \mid : 3$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 - 2}$$

$$x_{2/3} = \text{n.l.}$$

z) $x^4 - 2,8x^3 - 11,48x^2 + 2,4x = 0$ Ausklammern von x

$$x(x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x^3 - 2,8x^2 - 11,48x + 2,4 = 0$$

TR: $x_2 = 5$

$$x^3 \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0$$

$$1 \quad -2,8 \quad -11,48 \quad 2,4$$

$$0 \quad 1 \quad 2,2 \quad -0,48 \quad 0$$

$$x^2 + 2,2x - 0,48 = 0$$

$$x_{3/4} = -1,1 \pm \sqrt{1,1^2 + 0,48}$$

$$x_3 = 0,2 \quad ; \quad x_4 = -2,4$$