Lineare Gleichungssysteme mit 3 und mehr Variablen

Beispiel 1 mit 3 Variablen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -a+2b+c=6 \\ \text{II} & 2a-3b+2c=-11 \\ \text{III} & -4a+b-3c=-4 \end{array}$$

Zunächst bestimmt man die Variable, die man als Erste eliminieren will.
In diesem Fall soll „von hinten nach vorn“ vorgegangen werden, d.h. zuerst soll Variable c entfernt werden.
Dazu muss man jeweils zwei Gleichungen so kombinieren, dass sich beim Addieren die Variable c aufhebt. Dadurch werden zwei neue Gleichungen mit nur noch zwei Variablen gebildet.

In diesem Beispiel werden Gleichung I mit Gleichung II und dann erneut Gleichung I mit Gleichung III kombiniert. (Eine Gleichung muss doppelt verarbeitet werden.)

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -a+2b+c=6 & \mid\cdot(-2) \qquad \mid\cdot 3 \\ \text{II} & 2a-3b+2c=-11 & \\ \text{III} & -4a+b-3c=-4 & \end{array}$$

Die Nebenrechnungen werden der Übersicht halber, wenn möglich, seitlich versetzt geschrieben.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2a-4b-2c=-12 \\ \text{II} & 2a-3b+2c=-11 \quad + \\ \hline \text{IV} & 4a-7b \qquad =-23 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -3a+6b+3c=18 \\ \text{III} & -4a+b-3c=-4 \quad + \\ \hline V & -7a+7b \qquad =14 \end{array}$$

Es wurden zwei neue Gleichungen gebildet:

$$\begin{array}{ll} \text{IV} & 4a-7b=-23 \\ V & -7a+7b=14 \end{array}$$

Diese werden wieder miteinander kombiniert, um dann den Wert der ersten Variablen a zu erhalten.

Da hier der Koeffizient von b schon übereinstimmt, muss nichts mehr verändert werden und es wird sofort addiert. (Ansonsten muss wieder eine Nebenrechnung erfolgen.)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{IV} & 4a-7b=-23 \\ V & -7a+7b=14 \\ \hline & -3a \qquad =-9 \end{array} \quad +$$

Da in dieser letzten Gleichung nur noch eine Variable enthalten ist, benötigt man hier keine weitere Nummerierung.

Der Wert der Variablen a wird ausgerechnet:

$$a=3$$

Um den Wert der Variablen b zu erhalten, setzt man den Wert der Variablen a in eine der beiden Gleichungen ein, die nur a und b enthalten. (also IV oder V)

In diesem Beispiel wird in Gleichung V eingesetzt:

$$-7\cdot 3+7b=14$$

Durch Umformung ergibt sich für b der Wert:

$$b=5$$

Nun benötigt man noch den Wert der Variablen c. Diesen berechnet man in einer der drei Ausgangsgleichungen durch Einsetzen von a und b.

Hier wird in Gleichung I eingesetzt:

$$-3+2\cdot 5+c=6$$

Durch Umformung ergibt sich für c der Wert:

$$c=-1$$

Da es sich hier um die Berechnung eines Gleichungssystems handelt, muss am Schluss eine Lösungsmenge angegeben werden. In ihr werden nur die Werte der Variablen in der Reihenfolge des Alphabets aufgelistet, um die Zuordnung gewährleisten zu können. Dies geschieht auch, wenn die Variablen in einer anderen Reihenfolge berechnet wurden.

$$L=\{(3;5;-1)\}$$

Eine Probe in allen drei Gleichungen bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

Enthalten nicht alle Ausgangsgleichungen 3 Variablen, so kann man durch geschickte Kombination den Rechenweg verkürzen. Dabei ist es nicht immer sinnvoll, im ersten Schritt grundsätzlich das Eliminieren der letzten Variablen durchzuführen. Dies gilt ebenfalls für ein volles Gleichungssystem. Wenn man geschickter und mit kleinen Zahlen rechnen will, muss man sich aus den Gleichungen die richtige Variable für den ersten Schritt heraussuchen.

Beispiel 2 mit 3 Variablen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2a-3b+2c=12 \\ \text{II} & 5a+2b-c=-13 \\ \text{III} & -3a+c=7 \end{array}$$

Da hier die dritte Gleichung kein b enthält, kombiniert man im ersten Schritt nur die Gleichungen I und II so, dass die Variable b eliminiert wird.

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2a-3b+2c=12 & \mid\cdot 2 \\ \text{II} & 5a+2b-c=-13 & \mid\cdot 3 \\ \text{III} & -3a+c=7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4a-6b+4c=24 \\ \text{II} & 15a+6b-3c=-39 \quad + \\ \hline \text{IV} & 19a+c=-15 \end{array}$$

Diese neue Gleichung enthält nun dieselben Variablen wie Gleichung III, sodass beide miteinander kombiniert werden können.

$$\begin{array}{lll} \text{III} & -3a+c=7 & \mid\cdot(-1) \\ \text{IV} & 19a+c=-15 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{III} & 3a-c=-7 \\ \text{IV} & 19a+c=-15 \quad + \\ \hline & 22a=-22 \end{array}$$

Daraus ergibt sich a mit:

$$a=-1$$

Durch Einsetzen von a in Gleichung III und umformen erhält man c mit:

$$c=4$$

Setzt man a und c in Gleichung II ein, so erhält man b mit:

$$b=-2$$

Und die Lösungsmenge lautet in der richtigen Reihenfolge:

$$L=\{(-1;-2;4)\}$$

Die Probe nicht vergessen!

Beispiel 3 mit 4 Variablen:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & 2a-4b+c-2d=5 \\
\mathrm{II} & -3a+b-4c-d=6 \\
\mathrm{III} & a-b+2c+d=-2 \\
\mathrm{IV} & 4a-b+3c+3d=0
\end{array}$$

In einem solchen Fall muss man dreimal kombinieren (jeweils zwei Gleichungen), damit man drei Gleichungen mit nur noch drei Variablen erhält. Dann verfährt man wie im Beispiel 1. (bei fünf Gleichungen 4mal kombinieren für 4 Gleichungen mit 4 Variablen, usw.)

Welche Gleichungen mehrfach genutzt werden, ist durch geschicktes Kombinieren vorgegeben. Auch im Beispiel 3 soll als erstes die Variable d (letzte Variable) eliminiert werden. (Es bietet sich aber auch die Variable b an.)

Folgende Kombinationen bieten den schnellsten Erfolg mit geringstem Aufwand:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{I} & 2a-4b+c-2d=5 & \\
\mathrm{II} & -3a+b-4c-d=6 & \mid\cdot 3 \\
\mathrm{III} & a-b+2c+d=-2 & + \quad \mid\cdot 2 \\
\mathrm{IV} & 4a-b+3c+3d=0 & \\
\hline
V & -2a \qquad -2c=4 &
\end{array}$$

ergibt sich aus direkter Addition von Gleichung II und III

Nebenrechnungen

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{I} & 2a-4b+c-2d=5 & + \\
\mathrm{III} & 2a-2b+4c+2d=-4 & \\
\hline
VI & 4a-6b+5c \qquad =1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{II} & -9a+3b-12c-3d=18 & + \\
\mathrm{IV} & 4a-b+3c+3d=0 & \\
\hline
VII & -5a+2b-9c \qquad =18 &
\end{array}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{ll}
V & -2a \qquad -2c=4 \\
VI & 4a-6b+5c=1 \\
VII & -5a+2b-9c=18
\end{array}$$

Da hier nur noch zwei Gleichungen die Variable b enthalten, werden diese kombiniert, um b zu eliminieren.

$$
\begin{array}{lr}
V & -2a \qquad\quad -2c = 4 \\
VI & 4a - 6b + 5c = 1 \\
VII & -5a + 2b - 9c = 18 \quad | \cdot 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
VI & 4a - 6b + 5c = 1 \\
VII & -15a + 6b - 27c = 54 \quad + \\
\hline
VIII & -11a \qquad\quad -22c = 55
\end{array}
$$

Nun kann man die Gleichungen V und VIII kombinieren:

$$
\begin{array}{lr}
V & -2a - 2c = 4 \quad | \cdot (-11) \\
VIII & -11a - 22c = 55
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
V & 22a + 22c = -44 \\
VIII & -11a - 22c = 55 \quad + \\
\hline
 & 11a \qquad\quad = 11
\end{array}
$$

Daraus ergibt sich der Wert der Variablen a.
Durch Einsetzen in die anderen Gleichungen kann man dann c, danach b und zum Schluss d errechnen.

Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{(1;-2;-3;1)\}$$

Die Variablen werden in alphabetischer Reihenfolge angegeben. Mehrere Variablen dürfen denselben Wert besitzen (hier a und d).

Auch die Null ist ein Wert für eine Variable und muss entsprechend der Reihenfolge mit angegeben werden.