Berechnung von Gleichungen

Funktionsterme, die gleich null gesetzt wurden, nennt man Gleichungen.
Wir untersuchen ganzrationale Gleichungen n-ten Grades.
Das n steht für positive ganze Zahlen wie 1 und 2 und 3 usw.
Eine Gleichung 1. Grades stammt also von einer linearen Funktion.
Eine Gleichung 2. Grades stammt von einer quadratischen Funktion, usw.
Gleichungen kann man durch:

- **einfaches Auflösen nach x**
- **Wurzel ziehen**
- **p-q-Formel**
- **Ausklammern von x**
- **Horner-Schema (Polynomdivision)**
- **Substitution**

lösen. Dies sind unsere gängigen Verfahren.

Je nachdem, welchen Grad die Gleichung besitzt, wählt man das jeweils optimalste oder aber auch einzig mögliche Verfahren aus.
Als Beispiel betrachten wir eine Gleichung 4. Grades.

$0{,}5x^4 - 3x^3 + 2{,}5x^2 + 6x = 0$ oder $0 = 0{,}5x^4 - 3x^3 + 2{,}5x^2 + 6x$

Auf welcher Seite die Null steht, spielt keine Rolle.
Besitzt die höchste Potenz einen Koeffizienten (Zahl vor der Potenz, Faktor), der nicht +1 ist, so sollte man erst die Gleichung durch diese Zahl dividieren.
Entstehen dabei aber Brüche (Kommazahlen), lässt man den Faktor bis zur p-q-Formel stehen.

$0 = 0{,}5x^4 - 3x^3 + 2{,}5x^2 + 6x \,|: 0{,}5$

$0 = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x$

Da keine Konstante (Zahl ohne x) vorhanden ist, kann man x ausklammern.

$0 = x(x^3 - 6x^2 + 5x + 12)$

Die erste Lösung ist somit $x_1 = 0$.

Handelt es sich um eine Nullstelle eines Funktionsgraphen, so schreibt man $x_{N1} = 0$.

Wurde eine Extremstelle berechnet, wird diese mit $x_{E1} = 0$ *angegeben.*

Bei einer Wendestelle schreibt man $x_{W1} = 0$.

Handelt es sich um eine Schnittstelle von zwei Funktionen oder eine Stelle (x-Wert), die durch Vorgabe eines Funktionswerts (y-Wert) berechnet wird, so schreibt man nur das x mit seiner Nummerierung $x_1 = 0$.

In obigem Beispiel muss noch der Term in der Klammer berechnet werden.

$0 = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$

Ein weiteres Mal Ausklammern von x ist nicht möglich wegen der Konstante +12.
Deshalb kommt nun die Polynomdivision bzw. das **Horner-Schema** zum Einsatz.
Mithilfe des Taschenrechners ermittelt man eine weitere Lösung: z. B. $x_2 = -1$
Man muss auf die richtige Nummerierung der Lösungen achten.
TR:

$x_2 = -1$	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	-6	5	12	
	0	1	-7	12	**0**

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Zuerst werden die Potenzen der Gleichung notiert,
dann die Koeffizienten zugeordnet, und die Null vorgegeben.
Nun wird gerechnet: Zahl aus der dritten Zeile (0) mal die Lösung (-1) plus die Zahl aus der zweiten Zeile (1) =1
Diese Zahl wird unter die nächste Potenz (x²) geschrieben.
Mit diesem Wert wird die Rechnung erneut durchgeführt,
$1 \cdot (-1) - 6 = -7$, so lange bis am Ende das Ergebnis null lautet.
$-7 \cdot (-1) + 5 = 12$ und $12 \cdot (-1) + 12 = 0$

Durch diese Rechnung erhält man am Ende die Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$, die nun mit der p-q-Formel gelöst werden kann.

$x_{3/4} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 12}$ oder eben $x_{3/4} = 3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 12}$

die Ergebnisse lauten: $x_3 = 4$ und $x_4 = 3$

Muss man eine Gleichung durch Wurzel ziehen lösen, ist der Grad der Potenz gleich dem Grad der Wurzel.

$x^2 = 25 \,|\sqrt{\ }$ oder $x^4 = 91 \,|\sqrt[4]{\ }$

$x_1 = 5$ oder $x_1 = 3$ Ist der Grad gerade, erhält man immer + und – Zahl.

$x_2 = -5$ $x_2 = -3$

$x^3 = 64 \,|\sqrt[3]{\ }$ oder $x^3 = -64 \,|\sqrt[3]{\ }$ Ist der Grad ungerade, erhält man nur eine Lösung.

$x_1 = 4$ $x_1 = -4$

ACHTUNG:
Bei geradem Grad muss die Zahl vor dem Wurzel ziehen **positiv** sein!!! Sonst **keine** Lösung!
Bei ungeradem Grad kann man auch aus einer negativen Zahl die z.B. dritte Wurzel ziehen.

Eine besondere Form einer Gleichung 4. Grades ist eine sogenannte biquadratische Gleichung. Beispiel: $0 = x^4 - 5x^2 + 4$ nur gerade Exponenten => Achsensymmetrie zur y-Achse
Hier kann man schnell durch Substitution lösen.

$0 = x^4 - 5x^2 + 4$

$x^2 = z$ Man ersetzt (substituiert) das x² durch ein z.

$0 = z^2 - 5z + 4$ Diese quadratische Gleichung kann man nun mit p-q-Formel lösen.

$z_{1/2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 4}$ oder $z_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2 - 4}$

$z_1 = 4$ und $z_2 = 1$

$z = x^2$ Tauscht man nun zurück und

$x^2 = 4 \,|\sqrt{\ }$ $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ zieht die Wurzel,

$x^2 = 1 \,|\sqrt{\ }$ $x_3 = 1$ $x_4 = -1$ so erhält man alle Lösungen.

Sollte eine Lösung (oder sogar beide Lösungen) für z negativ sein, dann kann man für diesen Wert (diese Werte) keine Wurzel ziehen und man hat nur zwei Lösungen (gar keine Lösung).

Ist eine Gleichung so weit vereinfacht, dass nur noch ein linearer Term übrig ist, dann löst man einfach nach x auf.

$0 = -2x - 7 \,| +2x$

$2x = -7 \,| :2$

$x = -3{,}5$

Die Nummerierung des x-Wertes ergibt sich aus den vorangegangenen Rechnungen.
Ist es sowieso nur eine lineare Gleichung gewesen, kann man die Nummerierung 1 am x auch weglassen. (siehe Beispiel)